UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO

Marcio Dorigo

Investigando as Concepções de Equação de um Grupo de Alunos do Ensino Médio.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNIBAN

São Paulo

2010

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO
Marcio Dorigo

Investigando as Concepções de Equação de um Grupo de Alunos do Ensino Médio.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Bandeirante de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação do Professor Doutor Alessandro Jacques Ribeiro.

UNIBAN
São Paulo
2010

D774i Dorigo, Marcio.

Investigando as Concepções de Equação de um Grupo de Alunos do Ensino Médio / Marcio Dorigo. – [s.n.], 2010. São Paulo. 137 f.; 30 cm.

Dissertação de Mestrado - Universidade Bandeirante de São Paulo, Mestrado Acadêmico em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro.

1. Multisignificados de Equação 2. Equação. 3. Educação Algébrica 4. Educação Matemática 5. Ensino Médio.

I. Título

CDD 510

Dedico este trabalho à minha querida e amada esposa, Rozeana; a meus filhos, Lívia, Giovanna e Murilo; a minha mãe, Sonia; e ao meu pai, Geraldo Dorigo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela presença em todos os momentos difíceis deste percurso importante em minha vida.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, em especial à Diretoria de Ensino Sul 2.

Ao meu orientador, Professor Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, pelo acompanhamento pontual, paciente, competente e dedicado.

Aos meus amigos e colaboradores, em especial aos alunos que participaram da pesquisa.

Ao Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo, à Profª. Dra. Janete Bolite Frant e à Profª. Dra. Vera Helena Guisti de Souza, por aceitarem participar de minha banca e por terem realizado contribuições magníficas para o desenvolvimento e a continuidade da presente pesquisa.

Aos professores e companheiros do Curso de Pós-Graduação.

Aos alunos, coordenação e direção da Escola Estadual que me acolheu e contribuíram para realização da pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta pesquisa, com sugestões e críticas, enriquecendo ainda mais o meu trabalho, em especial: Fabio Simião, Isabela Barbosa, Silvio Antônio da Silva, Yuri Osti Barbosa, Arthur Vicente Damasceno e aos alunos voluntários.

Algumas pessoas gostam de dançar, outras não. Há quem vibre em dirigir automóveis e quem sinta sono na direção. Como tudo na vida, há quem goste de matemática e quem não a veja com bons olhos. Mas para gostar de alguma coisa, é preciso conhecê-la. É preciso experimentá-la e ter a chance de sentir algum prazer neste contato.

Imenes.

RESUMO

Nossa pesquisa, desenvolvida com um grupo de alunos do Ensino Médio, teve como objetivo investigar quais significados de equação estão presentes nas concepções desse grupo de alunos. Procuramos ainda investigar como esses alunos tratam situações matemáticas que contemplem esses diferentes significados de equação. Considerando tais objetivos, desenvolvemos um instrumento de coleta de dados composto por um conjunto de situações matemáticas especialmente elaboradas e/ou selecionadas para tal finalidade. A pesquisa fundamentou-se, tanto do ponto de vista metodológico, como do ponto de vista teórico, na tese de doutorado de Ribeiro (2007), a qual apresenta como resultado principal os *Multisignificados de Equação*. Dentre as conclusões por nós encontradas, observamos que os significados que apareceram com maior naturalidade nesse grupo de alunos foram o *intuitivo-pragmático* e o *processual-tecnicista.* Com base nessas evidências, deixamos como reflexão final a necessidade de se discutir com os alunos diferentes significados de equação, discussão essa que deve possibilitar a eles, uma ampliação de suas concepções acerca da noção de equação.

Palavras-chave: Equação. Multisignificados de Equação. Educação Algébrica. Educação Matemática. Ensino Médio.

ABSTRACT

This study aimed to investigate the meanings which characterize the conceptions of equations of a group of High School students. It sought also to examine how these students deal with mathematical situations which contemplate different meanings for equations. With this aim in mind, an instrument comprising of a set of mathematical situations elaborated and/or selected according to the meanings for equations encompassed within them was developed for data collection. The research drew its methodological and theoretical foundations from the doctoral thesis of Ribeiro (2007), which presents as its principal result the *Multimeanings of Equations*. Amongst the conclusions which resulted from the data analysis, it was observed that the meanings which appeared to emerge most naturally were the *intuitive-pragmatic* and the *procedural-technicist.* On the basis of the evidence obtained, the research indicated a need to discuss with High School students different meanings for equations in such a way as to permit an enlargement of their conceptions of the notion.

Key Words: Equation. Multimeanings of Equation. Educational Algebra. Mathematics Education. High School.

Sumário

APRESENTAÇÃO

A presente dissertação de Mestrado Acadêmico insere-se num projeto mais amplo, coordenado pelo Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, com o título *Os Multisignificados de Equação no Ensino e na Aprendizagem de Matemática: investigando contribuições para a formação do professor.* Tal projeto está sendo desenvolvido como parte do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Bandeirante de São Paulo.

Esta dissertação contribui com o referido projeto, uma vez que — inserida na fase diagnóstica do mesmo — investiga as concepções de equação de um grupo de alunos do Ensino Médio. Na continuidade do projeto, que é mais amplo, outros pesquisadores investigarão, em ambientes de aprendizagem, quais contribuições os *Multisignificados de Equação* podem trazer para o processo de aprendizagem de Álgebra.

No primeiro capítulo, apresentaremos nossas conjecturas e trajetórias, as quais foram construídas a partir da análise de pesquisas realizadas em Educação Matemática. Em seguida exporemos o objetivo e a questão de pesquisa, ou seja, quais significados de equação estão presentes nas concepções dos alunos do Ensino Médio ao ver e tratar situações — elaboradas e selecionadas, com fundamento nos significados de equações concebidos por Ribeiro (2007) — relacionadas a equações.

No segundo capítulo desenvolveremos nosso referencial teórico-metodológico, apresentando e discutindo os Multisignificados de Equação, os resultados obtidos na tese de doutorado de Ribeiro (2007). Ainda nesse capítulo, apresentaremos uma análise preliminar das situações matemáticas que compõem o instrumento de coleta de dados. Nessas análises relataremos algumas possíveis estratégias de resolução para cada situação das atividades que compõem o referido instrumento.

No terceiro capítulo, discorreremos inicialmente sobre como se deu a escolha da escola participante da pesquisa e dos alunos voluntários. Apresentaremos também o desenvolvimento das atividades 1 e 2 da pesquisa pelos alunos voluntários; em seguida, realizaremos as análises. As atividades —

realizadas item a item, nas duplas 1, 2, e 5 — foram desenvolvidas de forma manuscrita e audiogravada e, posteriormente, foram transcritas, para enriquecer os dados para análise.

Finalmente, no último capítulo traremos as conclusões e algumas considerações sobre a realização do presente trabalho, além de algumas questões — para futuras pesquisas — que acreditamos terem surgido durante esse processo.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA

1.1 Introdução:

Inquietações e Trajetória Acadêmico-Profissional

Tenho observado, durante o tempo que tenho trabalhado como professor de matemática, desde 1991, que normalmente os alunos veem a resolução de equação apenas como uma manipulação de letras, nesse caso como incógnita e revelam pouquíssimo entendimento das ideias matemáticas, em suas questões tanto estruturais quanto procedimentais. Por exemplo: os alunos manipulam as incógnitas para resolver as equações, sem saber os porquês. Numa situação do tipo 3x = 6, eles "pegam" o número que está multiplicando a "letra" e "passam" para o "outro lado", dividindo. Outra situação comum é o fato de não distinguirem as expressões 3x = 6 de 3x + 6, o que indica o não reconhecimento do uso das letras como variáveis ou como incógnitas.

Numa outra direção, não tenho observado, durante essa minha prática, a utilização de situações envolvendo a generalização de padrões, a observação de regularidades como diferentes abordagens para o desenvolvimento da Álgebra em sala de aula. O emprego de situações e problemas envolvendo a geometria e a aritmética é ainda muito tímido por parte de alunos e professores. Penso que isso talvez ocorra justamente por falta de uma diversidade de contextos propícios para tais abordagens. Acredito, além disso, que se usam muito as situações com enunciados do tipo "determine", "encontre", "resolva", "calcule o valor de", que acabam sempre apresentando a equação de forma explícita, isso não é ruim, mas podemos fazer o mesmo de maneira que sejam apresentados em enunciados mais significativos e contextualizados.

Acrescenta-se a estas minhas reflexões iniciais o fato de que eu mesmo, muitas vezes, vejo-me sem outras formas de ensinar senão aquelas que estão estritamente relacionadas às técnicas e aos processos mecanizados que me foram ensinados. Além disso, os livros didáticos normalmente não apresentam diferentes formas e maneiras de abordar as equações para os alunos.

Considero que um bom aprendizado de resolução de equações durante a educação básica deve desenvolver nos alunos uma melhor capacidade de abstração e generalização, de modo a ajudá-los a acompanhar melhor situações problema, situações do cotidiano, tomada de decisões; a ler e interpretar gráficos; a representar situações geométricas; a fazer conjecturas a respeito dos resultados da resolução de uma equação.

Ao fim de sua escolaridade obrigatória, os alunos veem-se no dilema de entrar na Universidade. É fato que, nos vários cursos de graduação que eles podem escolher, muitas vezes irão deparar-se com disciplinas matemáticas nas quais estão presentes as equações, quer para diferentes tipos de cálculos financeiros, quer para análises e tomadas de decisão, o que me faz conjecturar que a compreensão e a resolução de equações estão presentes e ligadas ao cotidiano escolar dos alunos tanto no Ensino Básico como no Ensino Superior.

Considerando a importância que o estudo das equações parece ter para os eles, durante sua trajetória escolar básica e na graduação, suponho que, utilizando atividades diversificas e diferentes maneiras para apresentar-lhes as equações, possibilitando assim que eles utilizem as equações de diferentes formas e contribuir para que sejam capazes de conjecturar suas estratégias de resolução e interpretar os resultados.

Com isso, minha preocupação com o ensino e a aprendizagem da Álgebra, e em particular das equações, levou-me a participar de cursos de formação continuada, em que sempre estava buscando me atualizar para suprir minhas expectativas e inquietações e também para poder contribuir para uma melhor formação de meus alunos.

Diante desses fatos, gostaria de salientar que, dentre os cursos que frequentei, posso dizer que os do CAEM-USP me ajudaram de forma acentuada a repensar minhas práticas de ensino, porém, eu ainda me sentia inseguro para poder superar meus anseios ora apresentados.

Contudo, foi o curso de Especialização em Educação Matemática da PUC/SP, oferecido em 2006 para professores da SEE/SP, que nos encantou e nos fez repensar sobre minhas aulas, sobre meus alunos e sobre o ensino de Matemática. Fez-me despertar para a continuidade e o aprofundamento de minha formação.

Ali tive a oportunidade de ratificar minha preocupação com a Álgebra, que acabou sendo corroborada pela monografia **Função quadrática: um estudo sobre as representações gráficas** (DORIGO, 2006), desenvolvida nesse mesmo curso.

Logo após, ingressei no curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, na expectativa de continuar aprimorando minha formação continuada e tendo como foco o ensino e a aprendizagem de equações. Com isso, estou envolvido com pesquisas que tenham como preocupação principal a construção de significados dos conceitos matemáticos os alunos.

Nessa direção, optei por ingressar em um grupo vinculado à linha de pesquisa de “Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações”. Nesse grupo, fui convidado para participar de um projeto mais amplo, já em andamento; a presente pesquisa insere-se na fase investigativa e teve como proposta *investigar as concepções de equação de alunos do Ensino Médio.*

1.2 Revisão bibliográfica

Nas considerações iniciais deste capítulo, procurei apresentar minhas reflexões e conjecturas sobre a resolução de equações. Verifiquei que minhas experiências apontaram para as dificuldades dos alunos, no que se refere ao tema equações. Sendo assim, passei a pesquisar em documentos oficiais, em teses e dissertações, em artigos; ou seja, fiz leituras que indicassem e aferissem minhas preocupações.

Com relação à Álgebra e à resolução de equações, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000, p. 120-121) sugerem tratá-las utilizando problemas que envolvam a vivência cotidiana dos alunos, para que estes tenham facilidade para ler uma variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também para utilizá-las como instrumento de cálculos de natureza financeira, estatística, prática e como instrumento para a abstração matemática.

Logo, nesse primeiro documento analisado, pude constatar que meus argumentos e minhas conjecturas sobre a resolução das equações estavam se fortalecendo. Ainda nessa leitura, percebi que o documento faz indicações de procedimentos básicos para o ensino da Álgebra: calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e com as operações válidas para o cálculo algébrico. Essas orientações apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) e as diversas estratégias que podemos desenvolver, no intuito de minimizar os problemas com a resolução de equações, estimularam-me ainda mais a contribuir com o ensino e a aprendizagem de equações, realizando pesquisas que abordem o tema e indiquem possíveis e/ou diferentes formas para tratar tais questões.

Ainda durante minhas leituras, encontrei outros autores que abordam esta mesma problemática. Constatei, em Dreyfus & Hoch (2004); Gil e Portanova (2007); Lima (2007); Lins e Gimenez (1997); e Ribeiro (2001), que os resultados de seus estudos apontam, de forma geral, para o excesso de mecanização e automatismo no ensino e na aprendizagem de Álgebra, principalmente no que se refere ao estudo das equações – importante tema tratado em Matemática, na Educação Básica.

No trabalho de Gil e Portanova (2007), os autores sinalizam para as dificuldades de aprendizagem dos alunos em Álgebra, resultados que obtiveram após uma análise de documentos oficiais. Eles observaram que, nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem um índice de 40% de acertos em muitas regiões do País (BRASIL, 1998, p. 115-116). Apontam também para a dificuldade dos alunos em compreender os procedimentos que fazem parte do estudo algébrico.

Segundo as pesquisadoras, o estudo dos conceitos algébricos que são iniciados na sétima série (sexto ano) do Ensino Fundamental e serão utilizados até o término do Ensino Médio possui deficiências e erros que se repetem e persistem de um ano para outro. Elas afirmam que seria importante que os alunos se apropriassem desses conceitos, pois estes podem levá-los a fazer abstrações e generalizações em um grau maior que o realizado no estudo da Aritmética, o que evitaria os erros constantes.

Dreyfus & Hoch (2004) sinalizam para o fato de que alunos do ensino secundário em Israel não reconhecem as estruturas internas de uma equação. Para esses alunos é fácil reconhecer uma equação, mas é difícil identificar e falar sobre sua estrutura interna, ou seja, a percepção da estrutura não é clara, o que os leva a resolvê-la de modo procedimental. Por isso, os autores afirmam que seria importante um investimento no ensino de equações com ênfase nas estruturas. Hoch e Dreyfus (2004) consideram que "percepção da estrutura" pode ser descrita como:

> [...] uma coleção de habilidades. Essas habilidades incluem ver uma expressão ou sentença algébrica como uma entidade, reconhecer uma expressão ou sentença algébrica como uma estrutura previamente encontrada, dividir uma entidade em sub-estruturas, reconhecer conexões mútuas entre estruturas, reconhecer qual manipulação é possível e [...] qual é útil para realizar. (p. 51).

Em Ribeiro (2001), o autor observou que alunos de 8ª série do Ensino Fundamental, ao resolver questões de Álgebra semelhantes àquelas apresentadas no Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo —Saresp — (1997), utilizam-se de procedimentos e estratégias processuais e, muitas vezes, não levam em conta os aspectos estruturais da Álgebra.

Outra pesquisa relevante para este estudo, a de Lima (2007), aponta em seus resultados que as concepções de equação de alunos de primeiro e segundo ano do Ensino Médio estão diretamente relacionadas com o uso de técnicas e procedimentos os quais, muitas vezes, mostram-se ineficazes. A compulsão por buscar imediatamente uma solução impede os alunos de pensar algebricamente, ou seja, eles não analisam nem interpretam os dados da equação antes de estabelecer estratégias para a resolução. Muitos utilizam técnicas mecanizadas, que vão desde a exaustão - o que entendemos por substituir valores até que se encontre a resposta - até mesmo às falsas regras, como, “passar para o outro lado com o sinal invertido”. Realizam a operação inversa, mas invertem o sinal, demonstrando apenas que aplicaram a regra. Segundo Lima (2007) observou, as equações algébricas resolvidas pelos alunos não tinham significado de equações para eles, mas sim de uma conta a ser resolvida.

Numa outra direção, observei que o trabalho de Lins e Gimenez (1997) discute que a Álgebra consiste em um conjunto de ações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações. No entanto, percebe-se que o trabalho com o estudo algébrico não vai muito além de manipulações de símbolos que, na maioria das vezes, não possuem nenhum significado que não seja o de manipular números e letras, sendo o seu estudo desenvolvido de forma mecânica. Constatei isso nas pesquisas analisadas anteriormente.

Os autores afirmam ainda que essa forma de ensino tem sido limitadora, pois restringe o papel do aluno à memorização de regras e à aplicação de técnicas e procedimentos, e não propicia a relação dos procedimentos algébricos com situações reais e cotidianas.

Com isso, percebi que as pesquisas por mim analisadas apontam sempre na direção do uso excessivo de técnicas de resolução das equações; de intensa mecanização e automatismo no ensino e na aprendizagem de Álgebra, principalmente no que se refere ao estudo das equações.

Até aqui, verifiquei que minha preocupação com o processo de ensino e de aprendizagem das equações torna-se mais relevante, dado que as pesquisas corroboram minhas inquietações iniciais. Como educador do Ensino Fundamental, do Médio e do Superior, tenho percebido que os problemas mais comuns na aprendizagem da Álgebra, mais particularmente na aprendizagem das equações, são: incompreensão no uso de letras; manuseio e aplicação de operações inversas; reconhecimento de uma equação; equacionamento; reconhecimento de diversas formas pelas quais as equações são apresentadas; “barreiras” para generalizar e abstrair uma equação, entre outros. Tais conjecturas são ratificadas pelas pesquisas até aqui mencionadas.

Dando continuidade às leituras, percebi que alguns estudos continuam apontando para o uso excessivo de mecanização nas técnicas de resolução das equações, mas também sinalizam que essas técnicas se tornaram receitas prontas e parecem estar passando de geração em geração. Constatei, em Fiorentini, Miorim e Miguel (1992, p. 40), a tendência que o professores possuem para trabalhar a Álgebra de maneira mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação: enfatizam simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões, tal como ocorria há várias décadas. Parece-me, então, que a ausência de novas formas de ensinar, identificada pelos autores em seu trabalho, seja um dos fatores responsáveis pelo baixo desempenho dos alunos nas questões que envolvem resolução de equações, como nos resultados de Ribeiro (2001) ou de Gil e Portanova (2007).

Outra questão que gostaria de discutir neste momento e que pode estar relacionada a essa ausência de novas formas de ensinar é o uso de materiais didáticos, nas aulas de matemática. Nesse sentido, a pesquisa de Zenere (2005) sinaliza que, dentre os materiais mais usados pelos professores para preparar suas aulas, estão os livros didáticos e os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Ratificando as reflexões de Zenere (2005) no Brasil, Sacristán (1998) na Espanha, indica que os materiais pedagógicos utilizados pelos professores, particularmente os livros didáticos, são mediadores decisivos da cultura nas escolas, pois eles oficializam o que e como se apresenta essa cultura a professores e a alunos. Em suas conclusões, Zenere aponta que os livros didáticos ainda condicionam as tarefas educacionais, em sua grande maioria, e apresentam um grande controle no desenvolvimento de um projeto curricular, definindo e reduzindo a Álgebra à sequência: definição – exemplos – aplicações - exercícios.

Com isso, entendo que os alunos acabam por encontrar grandes dificuldades em dar significado às atividades que lhes são propostas e adotam, em grande parte, um comportamento de meros repetidores de procedimentos mecânicos e “receitas prontas”.

Por outro lado, a pesquisa de Ribeiro (2007) apresenta seis diferentes significados para a noção de equação, aos quais o autor atribuiu o nome de *Multisignificados de Equação*. Ele sugere, em suas conclusões, que esses multisignificados possam vir a contribuir para uma melhoria significativa no ensino e na aprendizagem de equações, uma vez que contemplam diferentes formas de reconhecer (“ver”) e manipular (“tratar”) as equações. Como a pesquisa de Ribeiro (2007) é a fundamentação teórico-metodológica deste trabalho, ela será amplamente discutida mais à frente.

Nesse contexto, acredito que, a partir do momento em que a educação algébrica se propõe a desenvolver a capacidade do educando de pensar algebricamente e de produzir significados, como sugerido em Lins e Gimenez (1997), em Lima (2007) e em Ribeiro (2007), o desenvolvimento de habilidades e técnicas será apenas uma consequência. Isso parece indicar que a realização de “exercícios” procedimentais se torna eficaz no momento em que os alunos compreendem a natureza do que estão fazendo, ou seja, quando percebem que as técnicas que praticam estão inseridas num contexto.

Retomando as discussões anteriores sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), gostaria de levantar as dificuldades dos alunos em equacionar uma situação problema. Os PCN orientam-nos sobre a importância, na Educação Básica, da compreensão da linguagem algébrica na tradução de problemas reais para a linguagem matemática, quando queremos resolver tais problemas.

Segundo Schoen (1995), é necessário que o trabalho com conceitos e procedimentos algébricos também seja gradual, passando por uma fundamentação verbal, a fim de que os alunos deles se apropriem de forma efetiva. De acordo com as ideias de Schoen (1995), é interessante lembrar que

> [...] o desenvolvimento histórico do simbolismo algébrico começou com um período de Álgebra verbal ou retórica, que durou pelo menos três milênios. Ao período retórico surgiu-se um outro, de mais um milênio, em que o discurso algébrico caminhou gradualmente da fase retórica para a simbólica". (SCHOEN, 1995, p. 138)

Portanto, parece-me necessário que a linguagem algébrica seja desenvolvida de forma tal que conduza o aluno a apropriar-se da natureza e da estrutura das equações.

Mais uma vez, quero contemplar as discussões de Lins e Gimenez (1997, p. 137): "A atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a Álgebra. É nessa perspectiva que se entende o estudo algébrico com efetiva construção de conhecimento. Aquele estudo que é capaz de produzir significado".

Esses pesquisadores acreditam, ainda, que a exploração de situações problema seja uma forma bastante interessante para o desenvolvimento de alguns conceitos algébricos pelos alunos, pois, a partir delas, estes passam a obter e a construir ideias com o propósito de resolvê-las ou explicá-las.

É interessante que essas problematizações sejam bastante diversificadas, com a investigação de padrões em sucessões numéricas ou geométricas; o cálculo de áreas, volume e perímetros; o preenchimento de planilhas; análise de gráficos. Por meio dessas atividades, os alunos poderão ter a oportunidade de reconhecer regularidades, fazer generalizações e, assim, desenvolver a sua linguagem e o seu pensamento algébrico.

Desse modo, de acordo com Lins e Gimenez (1997), é de extrema importância que o professor, como orientador da aprendizagem, não dê ênfase a um único método de resolução, mas que desenvolva o pensamento flexível; mostre as diversas possibilidades relacionadas à aplicação das equações algébricas; e dê significado às regras utilizadas pelos alunos.

Enfim, pesquisas como as discutidas anteriormente apontam que as concepções de equação que os alunos possuem não estão suficientemente “adequadas”, pois elas acabam levando-os à compreensão e ao manuseio das equações apenas como procedimentos e técnicas, o que pode, no processo de aprendizagem, dificultar o pensamento algébrico.

Outro fator interessante é o fato de em nosso país haver poucas pesquisas que tratam do assunto resolução de equação e sua significação, neste sentido os pesquisadores Nagamachi (2009) e Martins (2008) ratificam a falta de pesquisas sobre o assunto equação e enfatizam a necessidade de pesquisas que tratem sobre o tema resolução de equações e sua significação.

Os pesquisadores fizeram um levantamento de estudos, no Brasil, que tratam da resolução de equações e sua significação: o trabalho de Nagamachi (2009) observou as pesquisas brasileiras voltadas para o Ensino Médio, e o de Martins (2008), as pesquisas brasileiras que envolvem o Ensino Fundamental II, porém ambos os estudos apontam para a necessidade de trabalhos que busquem significados para o ensino de equações. Os autores afirmam, ainda, que, no período de 1998 a 2006 – Nagamachi (2009) - de 1998 a 2004 Martins (2008), não há registro de trabalhos que tratem desse tema e que a tese de Ribeiro (2007) responde, em parte, a essa falta.

No que se refere a diferentes significados para a noção de equação, observo que as considerações apresentadas por Ribeiro (2007) são ratificadas pelas pesquisas de Martins (2008) e Nagamachi (2009), constatando a necessidade de trabalhar com diferentes significados de equação e com suas estruturas.

Assim, podemos verificar que, nesta revisão bibliográfica, as pesquisas, em grande parte, apontam para a necessidade de tratar a resolução de equação, fazendo uso de diferentes significados e apropriando-se das estruturas algébricas.

Portanto, a presente pesquisa caminha para responder a questão: *Quais as concepções de equação que estão presentes nos conhecimentos dos alunos* do Ensino Médio?

1.3 Problema de Pesquisa[1]

Fundamentada nas reflexões desenvolvidas na revisão bibliográfica e nas expectativas iniciais, a presente pesquisa tem o objetivo de **investigar concepções de equação dos alunos do Ensino Médio e verificar quais dos diferentes significados de equações estão presentes.**

É importante lembrar que esta pesquisa, como já exposto anteriormente, está inserida no projeto mais amplo que, num primeiro momento, visa investigar e diagnosticar "os Multisignificados de Equação no ensino e na aprendizagem de matemática", desenvolvido como parte do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Bandeirante de São Paulo, na linha de pesquisa "Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações".

[1] "A partir deste momento, este relato envolve outras vozes, além da minha própria. Por isso, será adotada, de ora em diante, a primeira pessoa do plural".

Assim, o projeto maior, coordenado pelo Professor Doutor Alessandro Jacques Ribeiro, assume como pressupostos que, conhecendo quais significados estão presentes nos conhecimentos dos alunos do Ensino Médio, possam ser “discutidos os Multisignificados de Equação no ensino e na aprendizagem de Matemática, possibilitando a ampliação das concepções de equação entre alunos”.

Finalmente, apresentamos aqui nossas questões de pesquisa: **Quais significados de equações podem ser encontrados nas concepções construídas pelos alunos do Ensino Médio, ao ver e tratar situações que remetem aos significados de equação concebidos por Ribeiro? Quais as concepções de equação que estão presentes nos conhecimentos dos alunos do Ensino Médio?**

Em nossa revisão de literatura, os pesquisadores Nagamachi (2009) e Martins (2008) indicaram a importância e a necessidade de estudos que focalizem a Álgebra, em especial a resolução de equação, apontando ainda que em nosso país existem poucas teses e pesquisas sobre o assunto. Este fato ratifica a importância de nossa pesquisa como contributo para alterar o presente cenário.

Nesse sentido, considerando as reflexões que apresentamos em nossa revisão de literatura e o fato de nosso objetivo, apresentado acima, e a presente pesquisa estarem fortemente fundamentados na tese de doutoramento de Ribeiro (2007), iniciamos o capítulo 2, com um estudo sobre os Multisignificados de Equação.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

2.1 Introdução

Neste capítulo iremos discutir o referencial teórico e metodológico de nossa pesquisa. Apresentaremos ainda os procedimentos metodológicos que utilizamos, bem como as análises preliminares das situações-problema que compõem nosso instrumento de coleta de dados.

Considerando o objetivo da pesquisa, quer seja, o de investigar as concepções de equação dos alunos do Ensino Médio e verificar quais são os significados de equações que estão presentes em suas concepções anteriormente apresentadas, nosso trabalho se fundamentou na tese de doutoramento de Ribeiro (2007), na qual ele apresenta seis diferentes significados que podem ser atribuídos à noção de equação – *Multisignificados de Equação* –, os quais subsidiaram, em nossa pesquisa, a elaboração do instrumento de coleta de dados, bem como as análises destes.

Uma vez que a tese de doutoramento de Ribeiro será nosso principal referencial teórico e servirá de base para nossa fundamentação teórico-metodológica, passamos agora a discutir o referido trabalho.

2.2 Multisignificados de Equação

A tese de doutoramento de Ribeiro (2007) surgiu da questão “O que é equação?”. O autor percebeu que os resultados de pesquisas em Educação Matemática revelavam diferentes concepções de equação ao longo da história da matemática, bem como entre alunos e professores. Nessa perspectiva, foi buscar respostas sobre o que é equação, iniciando suas observações do ponto de vista epistemológico, ou seja, de como se deu o desenvolvimento da noção de equação ao longo do processo histórico da humanidade.

Ribeiro percebeu que diferentes povos, com diferentes culturas entendiam e tratavam a noção de equação de formas diferentes. Os babilônios e os egípcios concebiam as equações a partir de problemas do dia a dia, de ordem prática. Como não existia uma linguagem simbólica nem métodos algébricos, esses povos tratavam as equações do ponto de vista aritmético. Os gregos, por sua vez, concebiam-nas a partir de situações geométricas, as quais eram tratadas do ponto de vista geométrico. Já os árabes e os hindus concebiam-nas de forma a observar sua estrutura, procurando resolvê-las do ponto de vista algébrico.

Ainda nesse mesmo trabalho, além do estudo epistemológico, Ribeiro (2007) desenvolveu um estudo didático, no qual investigou também como as equações apareciam em livros didáticos de Matemática e em dicionários de Matemática. Com isso, pôde perceber outras formas — diferentes daquelas observadas no estudo epistemológico acima discutido — de conceber e tratar as equações.

Como resultado principal de sua tese, a partir dos estudos epistemológico e didático, o autor concebe os *Multisignificados de Equação*, a saber: intuitivo-pragmático, dedutivo-geométrico, estrutural-generalista, estrutural-conjuntista, processual-tecnicista e axiomático-postulacional.

Ribeiro (2007) ressalta ainda que a noção de equação ganhou diferentes significados ao longo da história e era utilizada para diferentes fins. Os *Multisignificados de Equação* buscam contemplar, de forma sistêmica, esses diversos significados apresentados pelos mais diferentes povos ao longo da história.

Constatou que as equações já eram trabalhadas pelos babilônios em aproximadamente 1950 a.C., porém eram concebidas como igualdade entre valores, muito ligadas às ideias intuitivas, tratadas de forma aritmética e sempre vinculadas a problemas de ordem prática. Este é o seu significado intuitivo-pragmático.

A continuidade da pesquisa revelou que os gregos da Idade Heroica da Matemática, aproximadamente no século V a.C., reconheciam uma equação a partir de uma situação geométrica, ligada a figuras geométricas, em que as incógnitas eram, normalmente, segmentos de reta, as quais eram tratadas de forma dedutiva — é o significado dedutivo-geométrico, também percebido por Ribeiro (2007) na geometria de Omar Khayyam, quando este resolvia equações cúbicas utilizando intersecções de curvas.

Segundo esse mesmo estudo, um outro significado emergiu das concepções dos europeus renascentistas, que reconheciam uma equação a partir de suas generalidades, ou seja, suas incógnitas e parâmetros, e a tratavam de forma estrutural. Isso significa dizer que, para esses europeus (Cardano, Tartaglia, Abel, Galois, entre outros), o foco estava nas propriedades algébricas envolvidas na resolução das equações, compondo uma concepção estrutural-generalista.

Ribeiro identificou ainda outro significado de equação, que teve suas origens no movimento da matemática moderna, através da Matemática do grupo Bourbaki, assim como em matemáticos como Rogalski e Warusfel. Para todos esses, as equações eram reconhecidas a partir das relações entre conjuntos e sempre tratadas de forma a observar as propriedades algébricas, compondo a visão estrutural-conjuntista.

Ao investigar pesquisas em Educação Matemática, como as realizadas por Cotret (1997) e Dreyfus e Hoch (2004), Ribeiro verificou outro significado para equação: ela é reconhecida a partir do processo de resolução e tratada segundo técnicas de manipulações algébricas, numa abordagem processual-tecnicista.

Um último significado de equação observado e concebido por Ribeiro (2007) é o significado axiomático-postulacional: o autor propõe que uma equação possa ser reconhecida como “algo” sem definição, de maneira análoga a um conceito primitivo da Geometria Euclidiana. Dessa forma, uma equação pode ser trabalhada mesmo que não se discuta uma definição formal para ela.

A seguir apresentamos um quadro-síntese dos *Multisignificados de Equação* concebido por Ribeiro (2007).

Quadro 1 – Resumo dos significados atribuídos para equação

Significado	Características	Exemplos
Intuitivo-pragmático	Equação concebida como noção intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades. Utilização relacionada à resolução de problemas de ordem prática. originária de situações do dia a dia.	Babilônios e egípcios; livros didáticos de: Bourdon e de Imenes e Lellis.
Dedutivo-geométrico	Equação concebida como noção ligada a figuras geométricas, segmentos e curvas. Utilização relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medidas de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas.	Gregos; Omar Khayyam – Geometria das curvas.
Estrutural-generalista	Equação concebida como noção estrutural definida e com propriedades e características próprias, considerada por si própria e operando-se sobre ela. Utilização relacionada com a busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza.	Al-Khwarizmi; Descartes; Abel e Galois.
Estrutural-conjuntista	Equação concebida dentro de uma visão estrutural, porém diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos.	Rogalski; Warusfel; Bourbaki.
Processual-tecnicista	Equação concebida como a sua própria resolução – os métodos e as técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Diferentemente dos estruturalistas, os pesquisadores que adotam esta concepção não enxergam uma equação como um ente matemático.	Pesquisas em Educação Matemática: Cotret (1997); Dreyfus e Hoch (2004).

Axiomático-postulacional	Equação como noção da Matemática que não precisa ser definida, uma ideia a partir da qual outras ideias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Utilizada no sentido de noção primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana.	Chevallard; primeiro significado que poderia ser discutido no ensino-aprendizagem de Álgebra.

Fonte: Ribeiro, 2007, p. 127-128

2.3 Procedimentos Metodológicos

2.3.1 Sobre a coleta de dados

A pesquisa foi desenvolvida na perspectiva de uma abordagem qualitativa, e o caráter da investigação foi o de diagnosticar as condições atuais do ensino e da aprendizagem de equação com o grupo de alunos do Ensino Médio.

Trabalhamos com alunos do 3º ano, pois acreditávamos que teríamos mais elementos para nossa análise, uma vez que esses alunos deveriam estar familiarizados com os tipos de equações que seriam apresentadas. As situações desenvolvidas para essa pesquisa contemplam equações polinomiais, exponenciais, trigonométricas e logarítmicas, as quais por sua vez, remetem aos *Multisignificados de Equação.*

Os sujeitos de nossa pesquisa são alunos de uma escola pública na periferia da zona sul de São Paulo. O critério para determinar a escola onde a pesquisa foi realizada partiu de conversas com a direção e com seu coordenador pedagógico, os quais incentivaram uma pesquisa sobre ensino-aprendizagem de matemática. Nesse aspecto, a escola apresentou-se amigável e acolheu o pesquisador de portas abertas, já que outras da mesma região não permitiam pesquisas, pois alegavam atrapalhar o cumprimento do currículo.

A escolha dos alunos foi feita a partir de uma conversa do pesquisador com as duas turmas de 3º ano do Ensino Médio, onde explicou que se tratava de um trabalho de pesquisa de Mestrado sobre o ensino de Álgebra, conversou com os alunos sobre a importância da contribuição deles para uma pesquisa sobre ensino e aprendizagem da matemática e ressaltou, ainda, que todos que participassem deveriam levar, para os responsáveis assinarem, um documento de autorização para a participação na pesquisa.

O pesquisador perguntou a eles quem gostaria de participar e vários alunos se prontificaram. A pesquisa foi realizada com 16 alunos. A escolha dos voluntários foi feita pelo pesquisador, com a contribuição dos professores de matemática e física dessas turmas.

O pesquisador perguntou a eles quem gostaria de participar e vários alunos, cerca de 30, se prontificaram; dezesseis deles foram selecionados pelo pesquisador, com a contribuição dos professores de matemática e física dessas turmas, segundo os seguintes critérios: 1) alunos que pudessem chegar à escola às 18h, pois a pesquisa seria realizada na pré-aula, para não prejudicar as aulas normais dos alunos voluntários; 2) alunos que tivessem afinidade com as disciplinas de exatas e demonstrassem gostar de matemática, pois acreditávamos que seria melhor realizar a pesquisa com alunos dispostos a desenvolver as situações propostas nas atividades 1 e 2 que seriam aplicadas; 3) alunos que estivessem interessados em dar continuidade aos estudos em nível superior, pois seria uma oportunidade de estudo para eles e, segundo os professores da escola, esse interesse poderia tornar a participação dos alunos mais séria.

Após a escolha dos alunos voluntários, marcamos as datas de nossos encontros e partimos para pesquisa. Agrupamos os alunos selecionados em oito duplas, pois dessa forma acreditamos que haja discussão e interação entre os pares possibilitando entender a discussão ao ouvirmos as gravações para nossas analises. Trabalhamos com eles durante três encontros de uma hora e meia cada, em que, além das anotações escritas, tivemos também o registro de áudio. Estes últimos auxiliaram-nos nas análises, pois, durante os diálogos entre as duplas, as anotações escritas seriam insuficientes. A ideia era que nenhuma das discussões realizadas pelos alunos se perdesse.

Em nossos instrumentos de coleta de dados, colocamos questões com o intuito e o caráter de diagnosticar se, em suas concepções de equação, os alunos contemplavam alguns dos significados de equação concebidos por Ribeiro (2007).

No primeiro encontro, o pesquisador distribuiu lápis, borracha, caneta, uma calculadora para agilizar as operações, um Mp3 para gravação de áudio e quatro das oito situações da primeira atividade. Absolutamente nada foi nesse momento relatado sobre os significados de equação, nem sobre a ideia de equação, para não influenciar a pesquisa, visto que nosso objetivo era, então, verificar as concepções de equação dos alunos e a forma como eles tratavam as equações apresentadas nas situações propostas.

O pesquisador distribuiu quatro situações da atividade 1, e os alunos, antes de iniciar as resoluções, fizeram uma leitura preliminar de todas as situações; após a leitura, decidiram por qual iriam iniciar. Desenvolveram as quatro situações aleatoriamente e, após uma hora e meia de trabalho, paramos para tomar um lanche que o pesquisador havia preparado para a turma, encerrando, assim, o primeiro encontro com os alunos, que devolveram todo o material.

Em nosso segundo encontro, o pesquisador repetiu o mesmo processo realizado no primeiro encontro, só que dessa vez entregou as outras quatro situações restantes da atividade 1. Ainda nesse segundo encontro não foi relatado absolutamente nada sobre os significados de equação, nem sobre a ideia de equação, mais uma vez, para não influenciar.

Os alunos já estavam mais à vontade para fazer perguntas sobre as situações. O pesquisador, sempre que solicitado, respondia, mas com a preocupação de não se remeter à ideia de equação. Terminamos o segundo encontro também com um lanche e com conversas informais sobre cursos e profissões.

No terceiro encontro o pesquisador devolveu para as duplas as oito situações da atividade 1 que eles responderam. Juntamente com estas, foi entregue o material para realização da atividade 2 de nossa pesquisa, na qual eles deveriam analisar as situações da atividade 1.

Terminamos a pesquisa com um lanche especial, do qual participaram os professores de matemática, de física e o professor coordenador pedagógico. Agradecemos aos alunos pelo apoio e pelo incentivo à pesquisa realizada e revelamos, assim, o intuito de nossa pesquisa.

Nossa pesquisa foi realizada com alunos do último ano de escolaridade da Educação Básica, pois acreditávamos que ao trabalhar com alunos do 3º ano do Ensino Médio teríamos mais elementos para nossa análise, pois esses alunos deviriam estar familiarizados com os tipos de equações que foram apresentadas.

As situações desenvolvidas para essa pesquisa contemplam equações polinomiais, exponenciais, trigonométricas e logarítmicas, situações que possibilitasse a resolução realizada pelos alunos, as quais por sua vez se remetem aos *Multisignificados de Equação.* Passaremos agora a desenvolver algumas análises preliminares dessas situações.

2.3.2 Análises *preliminares* das atividades

Apresentamos aqui uma breve análise preliminar, em que procuramos relatar as atividades de nosso instrumento de coleta de dados e os objetivos de cada uma delas, além das possíveis estratégias de resolução para cada uma das situações apresentadas.

- **Análise preliminar da Atividade 1**

Observe as situações a seguir e responda cada uma delas:

A atividade 1 está dividida em oito situações, em que contemplamos cinco delas com apenas um significado, que chamamos de situações “puras”, e três que possuem dois ou mais significados, que chamamos de situações “combinadas”. O objetivo desta primeira atividade é verificar se nas soluções apresentadas pelos alunos são contemplados os diferentes significados de equação que compõem os Multisignificados de Equação (RIBEIRO, 2007).

❖ **Situação – 1a**

Determine os valores de y para quais a expressão (y ï 1)^2 é igual a -4y.

A situação que apresentamos deverá investigar se os alunos reconhecem a equação de 2º grau que está apresentada na linguagem mista, como eles desenvolvem a resolução da equação. Busca também averiguar se a maneira com que o aluno resolve essa equação do 2ª grau se remete ao significado processual-tecnicista, pois, embora possamos tratar essa equação de forma a aplicar processos e técnicas, fica claro que a manipulação de técnicas algébricas facilita o desenvolvimento da resolução.

O significado processual-tecnicista, segundo Ribeiro (2007). concebe equação como a sua própria resolução – como os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Sua utilização está relacionada a métodos e técnicas de resolução.

Algumas possíveis estratégias de resolução deste item:

I. Traduzir o enunciado para a linguagem matemática e utilizar as técnicas conhecidas de resolução de equações, para encontrar o valor da incógnita. Isso otimiza o trabalho em relação ao tempo. Dentre as possíveis técnicas utilizadas durante o processo, temos o emprego do trinômio quadrado perfeito e da fórmula de Bháskara:

$$(y-1)^2=-4y \Rightarrow y^2-2.y.1+1^2=-4y \Rightarrow y^2-2y+4y+1=0 \Rightarrow y^2+2y+1=0$$

$$\Delta=b^2-4.a.c$$

$$\Delta=(2)^2-4.1.1$$

$$\Delta=4-4$$

$$\Delta=0$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y=\frac{-2\pm 0}{2.1} \Rightarrow y_1=y_2=-1$$

II. Igualar algebricamente as sentenças apresentadas e, a partir disso, resolver a equação, atentando para as propriedades algébricas envolvidas, como distributividade do produto em relação à soma, comutatividade, associatividade, regular, etc.:

$$(y-1)^2=-4y \Rightarrow (y-1).(y-1)=-4y \Rightarrow y^2-y-y+1=-4y \Rightarrow y^2-2y+1=-4y$$

$$y^2-2y+4y+1=-4y+4y \Rightarrow y^2+2y+1=0$$

A partir desse momento, o aluno poderá utilizar um dos métodos conhecidos para a resolução da equação. Embora seja possível utilizar a fórmula de Bháskara, colocamos como opção a redução da equação a um trinômio quadrado perfeito.

$$y^2+2y+1=0 \Rightarrow (y+1)^2=0 \Rightarrow y+1=\pm\sqrt{0} \Rightarrow y_1=y_2=-1$$

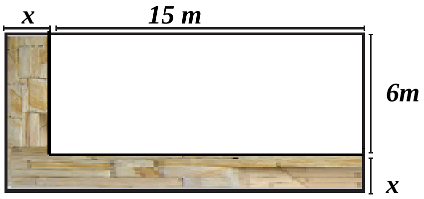
III. Através do método de tentativas, encontrar os valores que satisfaçam a equação:

Ao tentar substituir o 0 na igualdade (y-1)² = -4y, verifica-se que (0-1) ² = -4.0_1=0, o que é não é verdadeiro.

Ao substituir y = -1, temos (-1-1)²= -4.-1; então, conclui-se que 4=4. Verificando que a igualdade é verdadeira, o valor -1 é a raiz da equação.
Dessa forma, o aluno poderá chegar rapidamente ao resultado ou utilizar o método diversas vezes, até chegar ao resultado esperado.

- **Situação – 1b**

O projeto de um jardim retangular prevê que se coloquem no seu contorno (formando retângulos) pedras ornamentais, que estão indicadas na figura:



Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de 46 m², calcule a medida x, em metros[2].

[2] Questão retirada do Jornal do Aluno - São Paulo Faz Escola - Edição especial da proposta curricular – 1ª Série – Ensino Médio p. 44. Exercício 2 da Aula 9 – Equações do 2º grau na resolução de problemas – SP Fev/2008.

Esta situação deverá investigar se os alunos reconhecem a equação de 2º grau que está implícita e como eles desenvolvem a resolução da equação que está apresentada na forma geométrica de áreas de figuras planas. Procura também verificar se a maneira com que o aluno resolve essa equação do 2º grau se remete ao significado dedutivo-geométrico (Ribeiro, 2007), segundo o qual a noção de equação é concebida como ligada às figuras geométricas, aos segmentos. Sua utilização está relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medidas de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas.

Algumas possíveis estratégias de resolução deste item:

I. Traduzir o enunciado para a linguagem matemática e utilizar as técnicas conhecidas de área e resolução de equações para encontrar o valor da incógnita. Isso otimiza o trabalho em relação ao tempo. Dentre as possíveis técnicas utilizadas durante o processo, temos o emprego do trinômio quadrado perfeito e da fórmula de Bháskara:

(x+15).(x+6) = 136 $x^2 + 6x + 15x + 90 - 136 = 0$ $x^2 + 21x - 46 = 0$ a=1 b=21 c=-46	$\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = 21^2 - 4.1.(-46)$ $\Delta = 441 + 184$ $\Delta = 625$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$ $x = \frac{-21 \pm \sqrt{625}}{2.1} = \frac{-21 \pm 25}{2}$ $x = 2$ e $x = -23$ por ser uma medida -23 não serve

II. Através do método de tentativas, encontrar os valores que satisfaçam a equação.

Ao tentar substituir o valor de x na figura por 1, verifica-se que (1+15).(6+1) = 112, o que é não é verdadeiro;

Ao substituir x = 2, temos (2+15).(6+2) = 136; então, conclui-se que 46 + 90 = 136, pois 15 x 6 = 90, que representa a área que não está ocupada. Verificando que a igualdade é verdadeira, o valor 2 é a raiz da equação e a medida do lado desconhecido. Dessa forma, o aluno poderá chegar rapidamente ao resultado ou utilizar o método diversas vezes, até chegar ao resultado esperado.

- **Situação – 1c**

Observe as seguintes situações e encontre, se possível, valor(es) para x:

a) $(x - a).(x - b) = 0$. **Justifique sua resposta (Por quê?).**

Por que você resolveu dessa forma a questão?

b) $\frac{(x - a).(x - b)}{(x - a)} = 0$. **Justifique sua resposta (Por quê?).**

Por que você resolveu dessa forma a questão?

Na situação proposta, deverá ser investigado: se os alunos reconhecem a estrutura que está implícita; como eles desenvolvem a resolução da equação que está apresentada na forma de multiplicação e divisão de expressão algébrica; se a maneira com que o aluno resolve essa equação se remete ao significado estrutural-generalista, pelo qual, de acordo com Ribeiro (2007), a noção de equação é concebida como noção estrutural definida, com propriedades e características próprias, considerada por si própria e operando-se sobre ela. Sua utilização está relacionada com a busca de soluções gerais para uma classe de equações de uma mesma natureza.

Algumas possíveis estratégias de resolução para esses itens são:

I. Resolver a equação, utilizando-se de técnicas de resolução de equação comumente utilizadas, ou seja, desfazer a multiplicação, aplicando a distributiva, e proceder à resolução.

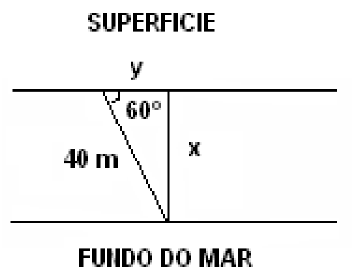
II. Observar a estrutura da equação e procurar uma forma de simplificá-la.

III. Atribuir valores inteiros para a e b e buscar a solução através de substituições.

IV. Perceber, analisando a estrutura da equação, que, quando x = b, na questão “b”, a igualdade torna-se verdadeira.

❖ **Situação – 1d**

Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60° com a superfície,conforme mostra o desenho: No esquema abaixo, o t e r mo ñ s u p e r f ² c i e ò e s t § s e m o a c e n t o g r correção?



a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?[3]

A situação que apresentamos deverá investigar: se os alunos reconhecem a equação trigonométrica — que está apresentada na língua natural —, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo; como eles desenvolvem a resolução da equação; se a maneira com que o aluno resolve essa equação trigonométrica se remete aos significados processual-tecnicista e intuitivo-pragmático, pois, embora outros significados possam surgir dessa situação, acreditamos que esses sejam os mais prováveis.

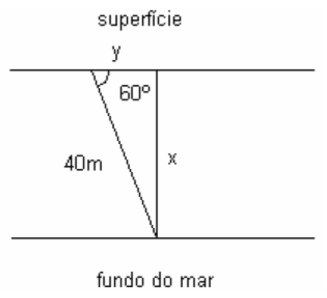
Segundo Ribeiro (2007), o significado processual-tecnicista concebe a equação como a sua própria resolução – como os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Sua utilização está relacionada a métodos e técnicas de resolução. Pelo significado intuitivo-pragmático, também conforme Ribeiro (2007), a noção de equação é concebida como intuitiva, ligada à ideia de

[3] Material retirado e adaptado do *site*: <http://www.scribd.com/doc/7698423/trigonometriatriangulo>, onde consta o material da Pontifica Universidade Católica do Rio Grande do Sul – FAMAT – Departamento de matemática para arquitetura.

igualdade entre duas quantidades. Sua utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática, originados de situações do dia a dia.

Algumas possíveis estratégias de resolução para esse item a) são:

I - Fazer um desenho para visualizar melhor a situação-problema:



a) Após construir o desenho, utilizar as relações trigonométricas no triângulo retângulo para encontrar a profundidade em que se encontra o mergulhador (no desenho, representado pela letra x) e a distância em que o mesmo estaria do ponto em que mergulhou (no desenho, representado pela letra y):

$$sen60° = \frac{x}{40}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40}$$
$$\frac{40\sqrt{3}}{2} = x$$
$$x = 20\sqrt{3}m$$

b) Para encontrar o valor de y, e utilizar a relação trigonométrica do cosseno de um ângulo:

$$\cos 60° = \frac{y}{40}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{40}$$
$$\frac{40}{2} = x$$
$$x = 20m$$

II. Utilizar a relação trigonométrica do cosseno de um ângulo ou do seno de um ângulo e encontrar os valores de y ou x, respectivamente. Após descoberto o valor de uma das incógnitas, utilizar o teorema de Pitágoras para descobrir a outra.

a) Escolhendo o seno:

$$sen60° = \frac{x}{40}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40}$$
$$\frac{40\sqrt{3}}{2} = x$$
$$x = 20\sqrt{3}m$$

b) Utilizando o teorema de Pitágoras:

$$40^2 = (20\sqrt{3})^2 + y^2$$
$$1600 = 400.3 + y^2$$
$$1600 = 1200 + y^2$$
$$1600 - 1200 = y^2$$
$$400 = y^2$$
$$\sqrt{400} = y$$
$$y = +20 \text{ ou } -20$$

Como y representa uma distância, temos que y = +20 m.

c) Escolhendo o cosseno:

$$\cos 60^\circ = \frac{y}{40}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{40}$$
$$\frac{40}{2} = x$$
$$x = 20m$$

d) Utilizando o teorema de Pitágoras:

$$40^2 = 20^2 + x^2$$
$$1600 = 400 + x^2$$
$$1600 - 400 = x^2$$
$$1200 = x^2$$
$$\sqrt{1200} = x$$
$$x = 20\sqrt{3}\ \text{m}$$

III. Outra forma de resolução que acreditamos ser possível é a de o aluno utilizar uma das maneiras acima, porém deixando explícitas, em sua resolução, as propriedades algébricas que está utilizando, destacando, assim, algumas propriedades algébricas por ele utilizadas:

a) Vamos apresentar o caso em que o aluno escolhe utilizar a relação trigonométrica do seno de um ângulo para encontrar a profundidade alcançada pelo mergulhador e depois utiliza o teorema de Pitágoras para encontrar a distância em que o mergulhador, subindo verticalmente para a superfície, se encontra do ponto em que mergulhou.

$$sen60° = \frac{x}{40}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40}$$
$$40.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40}.40$$
$$\frac{40\sqrt{3}}{2} = \frac{40x}{40}$$
$$20\sqrt{3} = x$$
$$x = 20\sqrt{3}m$$

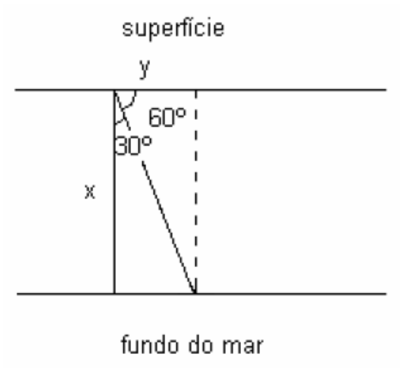
b) Utilizando o teorema de Pitágoras para encontrar o valor de y:

$$40^2 = (20\sqrt{3})^2 + y^2$$
$$1600 = 400 \ . \ 3 + y^2$$
$$1600 = 1200 + y^2$$
$$1600 - 1200 = 1200 + y^2 - 1200$$
$$400 = y^2$$
$$\sqrt{400} = \sqrt{y^2}$$
$$\pm 20 = y$$

Como já vimos, y = +20, por tratar-se de uma distância.

O mesmo tipo de resolução pode ocorrer com todas as possibilidades acima, ou seja, independentemente da forma de resolução escolhida pelo aluno, ele poderá dar ênfase às propriedades algébricas envolvidas.

IV. Considerando o desenho a seguir, outras versões do desenho original poderão aparecer; além disso, o professor poderá escolher os ângulos complementares para realizar as operações.



O aluno poderá considerar o ângulo de 30º ou o de 60º na base — que está no fundo do mar — do triângulo.

- **Situação – 1e**

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs; Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?[4]

A situação exposta deverá verificar se os alunos reconhecem a equação diofantina linear, utilizando uma situação-problema que está apresentada na linguagem natural e como eles desenvolvem a resolução da equação. O objetivo é também verificar se a maneira com que o aluno resolve essa equação se remete ao significado intuitivo-pragmático, pois acreditamos que os alunos devam tentar a resolução por meras tentativas e cálculos mentais.

Pelo significado intuitivo-pragmático, segundo Ribeiro (2007), a noção de equação é concebida como intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades. Sua utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática, originados de situações do dia a dia.
Algumas das possíveis estratégias de solução do item são:

I. Procurar resolver o problema utilizando-se de tentativas, seja por meio de cálculos mentais, seja por cálculos no “papel e lápis”.

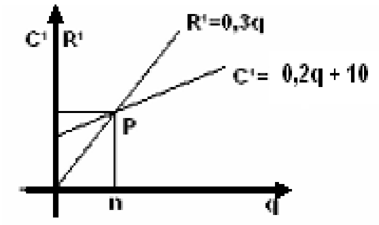
---

[4] Essa questão foi adaptada da Dissertação de Mestrado de Wagner Marcelo Pommer, com o título: **Equações diofantinas lineares** – um desafio motivador para alunos do Ensino Médio. PUCSP, 2008. p. 63.

II. Modelar o problema por meio da equação linear 12x + 16y = 70, em que x simboliza o número de CDs e y, o número de DVDs. Encontrar a equação 6x + 8y = 35, equivalente à equação original, na qual se verifica que uma solução inteira é impossível, pois a soma de dois números pares jamais será um número ímpar.

- **Situação – 1f**

Um empresário prevê que o custo total de produção "C", de certa quantidade "q" de geladeiras, e a receita obtida com a venda de todas as geladeiras produzidas, variam como mostra o gráfico abaixo.



O ponto "P" indica que o empresário não terá lucro nem prejuízo com a produção e a venda de um certo número de geladeiras. Com qual quantidade de geladeiras esse empresário não terá lucro nem prejuízo?[5]

A situação apresentada deverá investigar: se os alunos reconhecem a equação de 1º grau que gera a função do ponto em comum das retas que estão apresentadas no gráfico; se a maneira com que o aluno a encontra e a valida se remete aos significados dedutivo-geométrico e estrutural-conjuntista.

Pelo significado dedutivo-geométrico, como aponta Ribeiro (2007), a noção de equação é concebida como ligada às figuras geométricas, aos segmentos. Sua utilização está relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medidas de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas.

---

[5] Questão retirada e adaptada do SARESP/2007 – Matemática – 3º EM – Manhã – Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Já pelo significado estrutural-conjuntista, também conforme Ribeiro (2007), a noção de equação é concebida dentro de uma perspectiva estrutural, que está diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos.

Algumas das possíveis estratégias de solução do item são:

I- Organizar uma tabela e comparar os valores para q = 100 nas duas equações da reta.

q	R=0,3.q	q	C=0,2.q+10
1	0,3	1	10,2
2	0,6	2	10,4
3	0,9	3	10,6
4	1,2	4	10,8
5	1,5	5	11,0
...		...	
100	30	100	30

II –Criar um conjunto para cada uma das retas, com números inteiros, a partir do número 1 até 110. Nesse caso, podemos perceber a igualdade na centésima casa.

R=0,3.q

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
7,8	8,1	8,4	8,7	9	9,3	9,6	9,9	10	11	11	11	11	12	12	12	13	13	13	14	14	14	14	15	15

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
15	16	16	16	17	17	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20	20	20	21	21	21	22	22	22	23

76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
23	23	23	24	24	24	25	25	25	26	26	26	26	27	27	27	28	28	28	29	29	29	29	30	30

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
30	31	31	31	32	32	32	32	33	33

R=0,2.q+10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10,2	10,4	10,6	10,8	11	11,2	11,4	11,6	11,8	12	12,2	12,4	12,6	12,8	13	13,2	13,4	13,6	13,8	14

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
14,2	14,4	14,6	14,8	15	15,2	15,4	15,6	15,8	16	16,2	16,4	16,6	16,8	17	17,2	17,4	17,6	17,8	18

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
18,2	18,4	18,6	18,8	19	19,2	19,4	19,6	19,8	20	20,2	20,4	20,6	20,8	21	21,2	21,4	21,6	21,8	22

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
22,2	22,4	22,6	22,8	23	23,2	23,4	23,6	23,8	24	24,2	24,4	24,6	24,8	25	25,2	25,4	25,6	25,8	26

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
26,2	26,4	26,6	26,8	27	27,2	27,4	27,6	27,8	28	28,2	28,4	28,6	28,8	29	29,2	29,4	29,6	29,8	30

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
30,2	30,4	30,6	30,8	31	31,2	31,4	31,6	31,8	32

Quando n for igual a 100, não haverá nem lucro, nem prejuízo.

III- Observar o ponto (p) que é comum nas duas retas, equacionar e resolver a igualdade.

$R^1 = 0{,}3.q$ e $C^1 = 0{,}2.q + 10$

$$0{,}3.q = 0{,}2q + 10$$
$$0{,}3.q - 0{,}2q = 0{,}2q - 0{,}2q + 10$$
$$0{,}1.q = 10$$
$$10.0{,}1.q = 10.10$$
$$1q = 100$$

- **Situação – g**

  Resolva, em R, determinando o conjunto solução:

  $\mathbf{\log_2(2x-5)=2}$

A situação proposta busca investigar se os alunos reconhecem a equação logarítmica que está apresentada na forma simbólica e como eles desenvolvem a resolução da equação. Pretende também constatar se a maneira com que o aluno resolve essa equação logarítmica se remete ao significado processual-tecnicista, pois, embora possamos tratar essa equação de forma a aplicar processos e técnicas, fica claro que a manipulação de técnicas algébricas facilita o desenvolvimento da resolução.

De acordo com o que define Ribeiro (2007), o significado processual-tecnicista concebe equação como a sua própria resolução – como os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Sua utilização está relacionada a métodos e técnicas de resolução.

Algumas das possíveis estratégias de solução do item são:

I –Aplicar a definição do logaritmo, utilizando-se de suas técnicas de resolução.

$$\log_a^b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$2^2 = 2x-5$$
$$4 = 2x-5$$
$$2x-5 = 4$$
$$2x-5+5 = 4+5$$
$$2x = 9$$
$$x = \frac{9}{2}$$

Definição: Dados dois números reais positivos a e b, onde a ≠ 1 e a > 1 e b > 0, existe somente um número real x, tal que $a^x=b$ ou $\log_a b=x$.

❖ **Situação – h**

Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, em função do tempo *t*, em horas, de acordo com a fórmula $m = 3^{2t} + 3^{t+1} - 108$. Assim sendo, calcule o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar esse material antes que ele se volatilize totalmente.[6]

Pela situação que apresentamos, deverá ser investigado se os alunos reconhecem a equação exponencial que está apresentada na forma de língua natural e como eles desenvolvem a resolução da equação. Também será verificado, por esta situação, se a maneira com que o aluno resolve essa equação logarítmica se remete ao multisignificado processual-tecnicista, pois, embora seja possível tratar essa equação de forma a aplicar processos e técnicas, fica claro que a manipulação de técnicas algébricas facilita o desenvolvimento da resolução.

O significado processual-tecnicista, conforme indica Ribeiro (2007), concebe equação como a sua própria resolução – como os métodos e as técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Sua utilização está relacionada a métodos e técnicas de resolução.

Para a solução do item, algumas das possíveis estratégias são:

I- Organizar uma tabela e comparar os valores para t (1,2,3,4) na equação exponencial e verificar o valor de t que dá zero.

t	$3^{2t} + 3^{t+1} - 108$
1	-90
2	0
3	702
4	6696

[6] Material retirado do *site* <http://www.portalimpacto.com.br/docs/JerleyVestF1Aula14_09.pdf>, em 10/05/2009, às 20h.

II - Igualar m por zero e desenvolver a equação exponencial.

$$m = 3^{2t} + 3^{t+1} - 108$$
$$3^{2t} + 3^{t+1} - 108 = 0$$
$$(3^t)^2 + 3.3^t - 108 = 0 \qquad 3^t = y$$
$$y^2 + 3y - 108 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4.1.(-108) = 9 + 432 = 441$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{441}}{2.1} = \frac{-3 \pm 21}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3-21}{2} = -12 \\ \dfrac{-3+21}{2} = 9 \end{cases}$$

Substituindo, em $3^t = y$

$3^t = -12$, não conseguimos obter um valor para t em que a solução seja um número negativo.

$$3^t = 9 \Rightarrow 3^t = 3^2 \Rightarrow t = 2$$

Determinamos, assim, o valor de t = 2 horas.

- **Análise Preliminar da atividade 2**

A atividade 2 tem o intuito de investigar se a ideia de equação está presente no repertório dos alunos e se eles percebem quais das situações da atividade 1 estão presentes na ideia de equação. Enfim, pretendemos constatar se os alunos reconhecem equação nas situações apresentadas.

Atividade 2

Na atividade 1, existe um objeto matemático que chamamos de equação, que está presente em cada uma das situações.
Você reconheceu ou utilizou esse objeto matemático?
Se sim, em quais das situações e por quê?
Se não, justifique o porquê não utilizou.

O objetivo dessa atividade é verificar se, ao dizer que o objeto matemático em análise é a equação, os alunos reconhecem em quais situações matemáticas as equações estão contempladas e se apresentam suas justificativas.

Ao analisar tais justificativas, acreditamos encontrar – ainda que de forma implícita – alguns dos diferentes significados que podem ser atribuídos à equação, conforme os Multisignificados de Equação (RIBEIRO, 2007).

Esse item faz-se necessário, uma vez que os alunos podem não reconhecer a equação presente na atividade 2. Porém pode ser dispensável, caso os alunos reconheçam e utilizem as equações para desenvolver a atividade 2.

Algumas possíveis estratégias de resolução para esse item são:

I. Os alunos classificam os itens da atividade 1 em: “é equação” ou “não é equação”.

II. As duplas reconhecem que nos estamos referindo à equação e indicam que esse objeto matemático está contemplado nos itens c, g, e h. Nas justificativas, relatam que se trata de equação por apresentar uma igualdade entre valores, em que um (ou mais) destes valores devem ser encontrados. Acreditamos que os alunos deverão argumentar com mais detalhes na atividade 2, considerando o objetivo desta última. Assim, apresentaremos, nas análises da referida atividade, uma discussão mais detalhada das justificativas que imaginamos que os alunos poderão utilizar.

Apresentamos a seguir algumas respostas possíveis para cada item da atividade 1. A ordenação na apresentação de tais respostas atende ao mesmo critério utilizado na atividade 1, qual seja, obedece à maior probabilidade de ocorrência.

Atividade 1 – Item a:

O aluno:

I. Reconhece uma equação e ainda a classifica como uma equação do 2º grau.

II. Traduz o enunciado do problema em uma sentença matemática que o mesmo relaciona com uma equação, porém não consegue justificar sua escolha.

III. Não reconhece uma equação permeando o item a, porque ela não aparece explícita no problema, ou seja, não é apresentada na forma $(y-1)^2 = -4y$ ou, ainda, na forma $y^2 + 2y +1 = 0$.

Atividade 1 – Item b:

O aluno:

I. Reconhece uma equação permeando o item b e escreve o produto dos lados da figura, utilizando a ideia de área de figuras planas.

II. Reconhece uma equação que está relacionada às fórmulas de áreas que podem ser utilizadas para resolver tal situação.

III. Reconhece uma equação implícita na figura, construindo a equação por decomposição da figura.

IV. Assegura que a equação existe, mas não consegue mostrar de que forma ela poderia manifestar-se.

V. Não reconhece uma equação permeando o item b.

Atividade 1 – Item c:

O aluno:

I. Reconhece uma equação, pois existem incógnitas e uma igualdade, ainda que não encontre uma maneira de resolvê-la.

II. Não se trata de equação, uma vez que os métodos por ele conhecidos não foram suficientes para resolver a situação.

III. Constata que não se trata de uma equação, pois não tem coeficientes numéricos, mas somente coeficientes literais e parâmetros.

Atividade 1 – Item d:

O aluno:

I. Reconhece uma equação trigonométrica.

II. Não reconhece uma equação nessa situação e alega que se trata de trigonometria, e não de equação.

III. Reconhece uma equação, utilizando-se do teorema de Pitágoras.

Atividade 1 – Item e:

O aluno:

I. Reconhece que existe uma equação permeando o item, porém não consegue explicitá-la.

II. Reconhece que existe uma equação permeando o item. Alega faltar dados para montar um sistema de equações, pois acredita que essa é a única forma de resolver o problema.

III. Reconhece uma equação permeando a situação e modela a equação 12x + 16y = 70, em que y representa a quantidade de DVDs e x, a quantidade de CDs.

Atividade 1 – Item f:

O aluno:

I. Reconhece duas equações no gráfico.

II. Reconhece a igualdade do ponto “*p*” e resolve a equação.

III. Não reconhece uma equação nessa situação e alega que se trata de um gráfico, e não de equação.

Atividade 1 – Item g:

O aluno:

I. Aplica a definição de logaritmo para encontrar a equação e resolvê-la.

II. Afirma que não se trata de uma equação, e sim de uma situação envolvendo logaritmos.

III. Aplica a definição de logaritmo, encontra a equação, mas não a reconhece como equação.

Atividade 1 – Item h:

O aluno:

I. Reconhece uma equação, utilizando-se das propriedades das potências.

II. Reconhece uma equação e resolve-a, usando as técnicas para equação exponencial.

III. Diz que não existe uma equação permeando esse item, pois se trata de uma situação envolvendo exponenciais e química.

Com a análise preliminar acima, não temos a pretensão de apresentar todas as possibilidades de resolução das situações matemáticas que constam do presente instrumento de coleta de dados; pretendemos apenas relatar algumas possíveis estratégias, que acreditamos, segundo nossa prática como professores, poderão ocorrer durante as aplicações das atividades 1 e 2.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DOS DADOS

3.1 Introdução

Neste capítulo analisaremos o desenvolvimento das situações realizadas pelas **duplas 1, 2 e 5.** Procuramos observar se essas duplas, em suas resoluções, remeteram-se aos significados propostos em cada situação. Ainda neste capítulo, procuraremos utilizar os protocolos das duplas escolhidas, discutindo suas estratégias em relação à utilização e ao reconhecimento das equações nas situações propostas.

3.2 Análises dos dados coletados

A análise dos dados está fundamentada nos diferentes significados que compõem os *Multisignificados de Equação* (RIBEIRO, 2007) e as análises preliminares desenvolvidas no capítulo anterior.

Como já considerado anteriormente, pelo fato de esta pesquisa fazer parte de um projeto mais amplo, nossas preocupações durante as análises também irão contemplar este aspecto, considerando que pretendemos levantar questionamentos e reflexões que auxiliem e possam subsidiar as pesquisas futuras do grupo envolvido no projeto mais amplo.

Nesse sentido, os resultados desta pesquisa deverão fornecer informações importantes quando da elaboração das situações de intervenção que deverão ser utilizadas para a continuidade das pesquisas do projeto **Os Multisignificados de Equação no ensino e na aprendizagem de matemática:**

investigando contribuições para a formação do professor.

Para a eficácia das situações de intervenção que serão utilizadas nas etapas seguintes do projeto acima, faz-se necessário considerar quais são os significados de equação que os alunos já possuem e expressam em suas concepções. Assim, as situações de intervenção poderão abordar mais enfaticamente aqueles significados que não apareceram e apresentar novas situações para os que já se fazem presentes entre os alunos.

Considerando o objetivo da atividade 1, quer seja, verificar se são contemplados os diferentes significados de equação nas resoluções dos alunos, apresentamos um quadro-resumo desta nossa análise inicial.

As primeiras análises apresentadas nos quadros abaixo, além de fornecerem um panorama mais amplo dos resultados, auxiliaram-nos na escolha das duplas que analisamos, do ponto de vista qualitativo, neste momento de nosso trabalho.

Quadro 2- Panorama dos resultados da atividade 1 obtidos pelas duplas quanto aos diferentes significados (RIBEIRO, 2007).

	Atividade 1											
	Dupla 1			Dupla 2			Dupla 3			Dupla 4		
	Apareceu	Não apareceu	Em branco	Apareceu	Não apareceu	Em branco	Apareceu	Não apareceu	Em branco	Apareceu	Não apareceu	Em branco
Situação a		X			X			X			X	
Situação b		X			X			X			X	
Situação c(a)		X			X			X			X	
Situação c(b)		X			X			X			X	
Situação d(a)	X			X				X			X	
Situação d(b)	X			X				X			X	
Situação e	X				X			X			X	
Situação f	X				X		X				X	
Situação g		X		X				X			X	
Situação h		X			X			X			X	

	Atividade 1											
	Dupla 5			Dupla 6			Dupla 7			Dupla 8		
	Apareceu	Não apareceu	Em branco	Apareceu	Não apareceu	Em branco	Apareceu	Não apareceu	Em branco	Apareceu	Não apareceu	Em branco
Situação a	X				X			X			X	
Situação b		X			X			X			X	
Situação c(a)		X		X				X			X	
Situação c(b)		X				X		X			X	
Situação d(a)	X			X				X			X	
Situação d(b)	X			X				X			X	
Situação e		X				X		X			X	
Situação f	X				X			X			X	
Situação g	X				X			X			X	
Situação h		X			X			X			X	

A atividade 2 tem por objetivo verificar se os alunos reconheceram e/ou utilizaram equação nas resoluções apresentadas na atividade 1. O quadro abaixo fornece um resumo de nossas análises, as quais serão aprofundadas, neste momento da pesquisa, para a dupla escolhida. Vale ainda lembrar que a atividade 2 será considerada como complementar à atividade 1, quando da análise qualitativa.

Quadro 3 – Panorama dos resultados da atividade 2 obtidos pelas duplas.

	Reconheceu	Não reconheceu	Utilizou	Não
Dupla 1	d, g	a, b, c, e, f, h	d, f, g	a, b, c, e, f, g
Dupla 2	c, g	a, b, d, e, f, h	a, c	b, d, e, f, g, h
Dupla 3	a, b, d(a), f, g,h		d(a), f, g, h	
Dupla 4		a, b, c, d,e,f,g,h		a,b,c,d,e,f,g,h
Dupla 5	a, d, f, g	b, c, e, h	a, d, f, g	b, c, e, h
Dupla 6	b	d, e, f, g, h	d, f, g, h	e
Dupla 7		a, b, c, d,[7]e,f,g,h		a,b,c,d,e,f,g,h
Dupla 8		a, b, c, d,e,f,g,h		a,b,c,d,e,f,g,h

A partir dos resultados verificados e apresentados acima (quadros 1 e 2), foram escolhidas as **duplas 1, 2, e 5** para aprofundarmos as nossas análises. As escolhas basearam-se nos resultados apresentados por estas duplas, os quais possibilitaram uma reflexão mais refinada, considerando que tais duplas produziram materiais com maior nível de detalhamento.

Análise das situações – Atividades 1 e 2

Como já anunciado anteriormente, nosso objetivo é verificar *se* e *como* os diferentes significados de equação estão presentes nas concepções de alunos do Ensino Médio.

Para isso, apresentamos a seguir as respostas desenvolvidas pelos alunos das **duplas 1, 2, e 5** para cada item da atividade 1 e para a atividade 2. Procuramos, nesta análise, observar se os diferentes significados de equação concebidos por Ribeiro (2007) estão presentes e como os diferentes significados de equação que levantamos nas análises *preliminares* aparecem nas resoluções dos alunos. Além disso, identificamos se os alunos reconheceram as equações das situações da atividade 1 e como eles as utilizaram, quando desenvolviam suas estratégias de resolução.

Nesta parte do trabalho, faremos a análise por duplas, iniciando pela **dupla 1.**

3.3 Análise das situações resolvidas e apresentadas pela dupla 1

Atividade 1 – Situação a

Determine os valores de y para os quais a expressão (y ï 1)^2 é igual a -4y.

Nesta situação da atividade 1, a **dupla 1** não desenvolveu a resolução da equação do segundo grau utilizando-se de processos e técnicas. Em nossa análise *preliminar*, levantamos como possíveis estratégias de resolução a utilização de Bháskara, ou ainda o desenvolvimento da equação, utilizando-se de produtos notáveis e transformando a equação em um trinômio do quadrado perfeito, o que entendemos que remete ao significado processual-tecnicista. Todavia, a **dupla 1** resolveu corretamente a situação, o que podemos constatar na Figura 1. Os alunos fizeram uma tentativa, substituindo y por -1, e observaram que esse valor satisfaz a igualdade. Havíamos previsto essa resolução como possível.

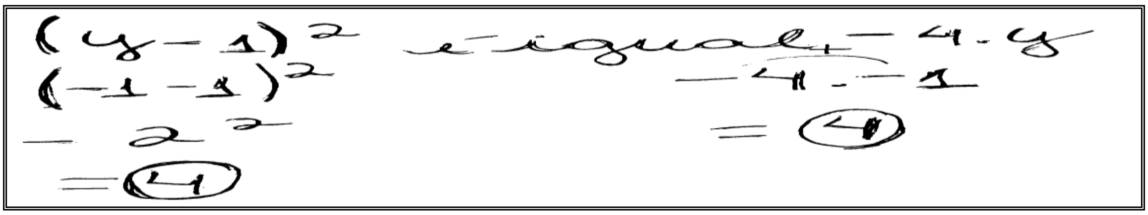


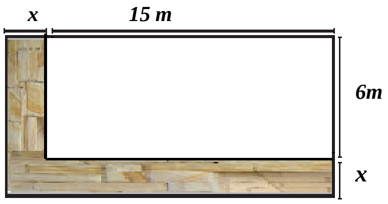
Figura 1.

Com relação à atividade 2, a **dupla 1** explicitou, conforme revela a transcrição, que não reconheceu equação na situação a) da atividade 1. Além disso, os alunos deixaram claro que não utilizaram equação para encontrar a solução.

Transcrição 1- ***Não reconhecemos e nem utilizamos equação. Pensamos que a melhor forma seria, ou a única forma que sabíamos de resolver era "chutando" para encontrar o resultado.***

Atividade 1 – Situação b

O projeto de um jardim retangular prevê que se coloquem, no seu contorno (formando retângulos), pedras ornamentais que estão indicadas na figura:



Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de 46 m², calcule a medida x, em metros.

Nesta situação da atividade 1, a **dupla 1** não desenvolveu a resolução da equação do segundo grau, utilizando-se de conceitos de áreas de figuras planas, neste caso, área de retângulo. Em nossa análise *preliminar*, levantamos como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 2º grau, empregando as somas algébricas das áreas do retângulo maior para encontrar a equação do 2° grau e resolvê-la, o que entendemos que remete ao significado dedutivo-geométrico e estrutural-generalista. Não obstante, a **dupla 1** resolveu corretamente a situação, o que podemos constatar na Figura 2. Os alunos fizeram uma tentativa, substituindo x por 2, e observaram que esse valor satisfaz a igualdade. Apesar de não se remeter à ideia de equação em sua resolução, a

dupla 1 utilizou uma ideia geométrica, quando decidiu dividir a figura visualmente, para calcular cada pedaço.

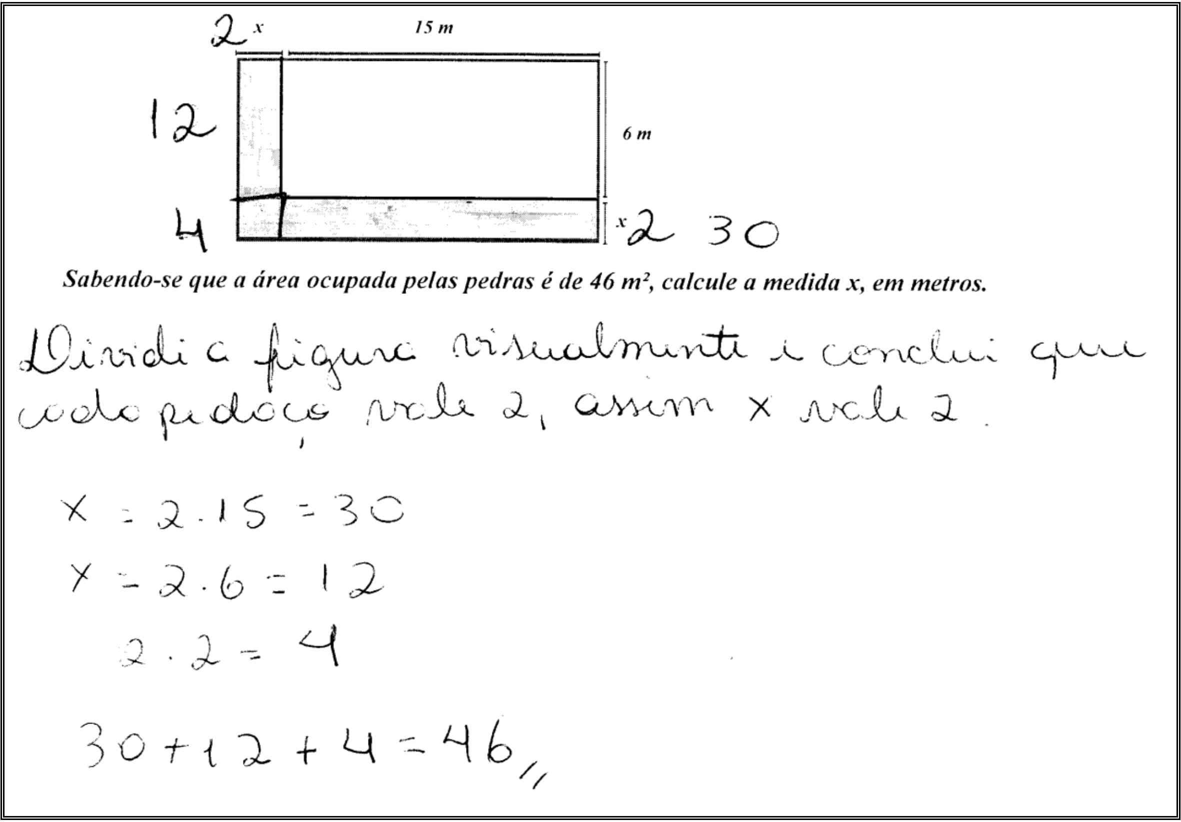


Figura 2.

Com relação à atividade 2, a **dupla 1** explicitou, conforme a transcrição abaixo, que não reconheceu equação na situação a) da atividade 1. Além disso, seus componentes deixaram claro que não sabem definir o que é equação.

Transcrição 2 - ***Não reconhecemos a equação. Porém não sabemos se utilizamos, pois não sabemos definir o que é equação. Dividimos a figura visualmente e concluímos que cada pedaço valia 2, assim x=2.***

Atividade 1 – Situação c

Observe as seguintes situações e encontre, se possível, valor (es) para x:

a) $(x - a).(x - b) = 0$ **Justifique sua resposta (Por quê?).**

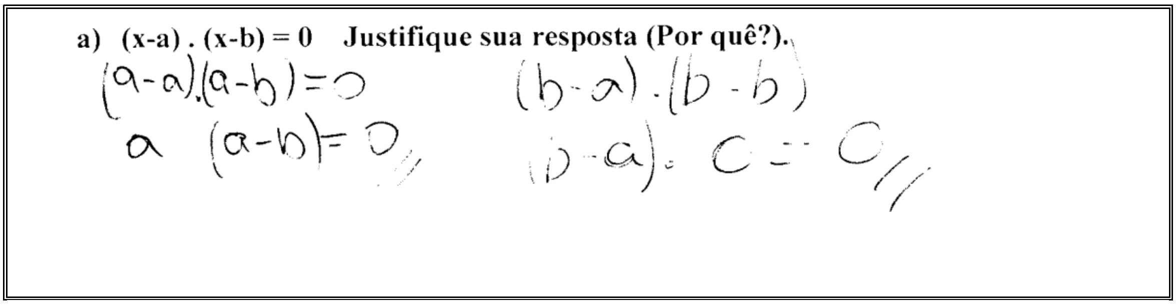
Por que você resolveu desta forma a questão?

Nessa situação, a **dupla 1** apresentou uma solução em que substituiu x por a; e, depois, por b em cada fator, assumindo, assim, a ideia de que, quando o resultado do produto de dois fatores é zero, um dos fatores é zero. Essa afirmação foi escrita pela **dupla 1**, quando fez a justificativa.

Transcrição da justificativa: ***X pode ser <u>a</u> ou pode ser <u>b</u>.***   ***Resolvemos a questão assim porque qualquer número multiplicado por 0 é 0. Então, se a-a=0, a resposta será 0.***

Verificamos que a **dupla 1** não escreveu o desenvolvimento da equação; apenas substituiu a variável para validar a condição, o que podemos constatar na Figura 3. Isso se confirmou na atividade 2, em que a **dupla 1** declarou não saber se utilizou equação, pois descobriu o valor de x por tentativa.

Em nossa análise *preliminar,* indicamos como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 1º grau, o que julgamos remeter ao significado estrutural-generalista**.**



a) (x-a) . (x-b) = 0   Justifique sua resposta (Por quê?).

$(a-a).(a-b)=0$ $(b-a).(b-b)$

$a\ (a-b)=0$ // $(b-a).\ 0 = 0$ //

Figura 3

b) $\frac{(x-a).(x-b)}{(x-a)}=0$ **Justifique sua resposta (Por quê?).**

Por que você resolveu desta forma a questão?

Nessa situação, a solução da **dupla 1** substituiu x por a e, depois, por b, em cada fator, assumindo assim a ideia de que, se o resultado do produto de dois fatores é zero, um dos fatores é zero. Essa afirmação foi escrita pela **dupla 1** quando fez a justificativa.

Transcrição da justificativa: ***Resolvemos seguindo o mesmo raciocínio da questão a. Nesta questão, o x pode ser apenas b, porque, dividindo, vai dar 0. O x não pode ser a, porque 0/0 não existe resultado.***

Constatamos, então, que a **dupla 1** não escreveu o desenvolvimento da equação, apenas substituiu a variável para validar a condição, o que a Figura 4 comprova e foi confirmado na atividade 2, em que a **dupla 1** declarou não saber se utilizou equação, pois descobriu o valor de x por tentativa.

Nossa análise *preliminar* apontou como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 1º grau, com uma simplificação antecipada de (x-a)/(x-a), o que entendemos que remete ao significado estrutural-generalista.

b) $\frac{(x-a).(x-b)}{(x-a)} = 0$ **Justifique sua resposta (Por quê?).**

① $\frac{(a-a)\cdot(a-b)}{(a-a)} = 0$

$\frac{0 \cdot (a-b)}{0} =$ não existe

② $\frac{(b-a)\cdot(b-b)}{(b-a)}$

$\frac{(b-a) . 0}{(b-a)} = 0$

Figura 4.

Com relação à atividade 2, a **dupla 1** explicitou, conforme demonstra a transcrição, que não reconheceu equação na situação a) da atividade 1. Além disso, os alunos declararam que não sabem definir o que é equação.

Transcrição - ***Não reconhecemos a equação. Porém não sabemos se utilizamos. Através de tentativas fomos descobrindo os valores para x.***

Atividade 1 – Situação d

Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60° com a superfície.

a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

Nessa situação, inicialmente a **dupla 1** procurou traduzir o problema para uma figura, o que facilitou a compreensão. Em seguida, como havíamos previsto em nossa análise *preliminar*, aplicou a relação trigonométrica do seno, conforme mostra a Figura 5.

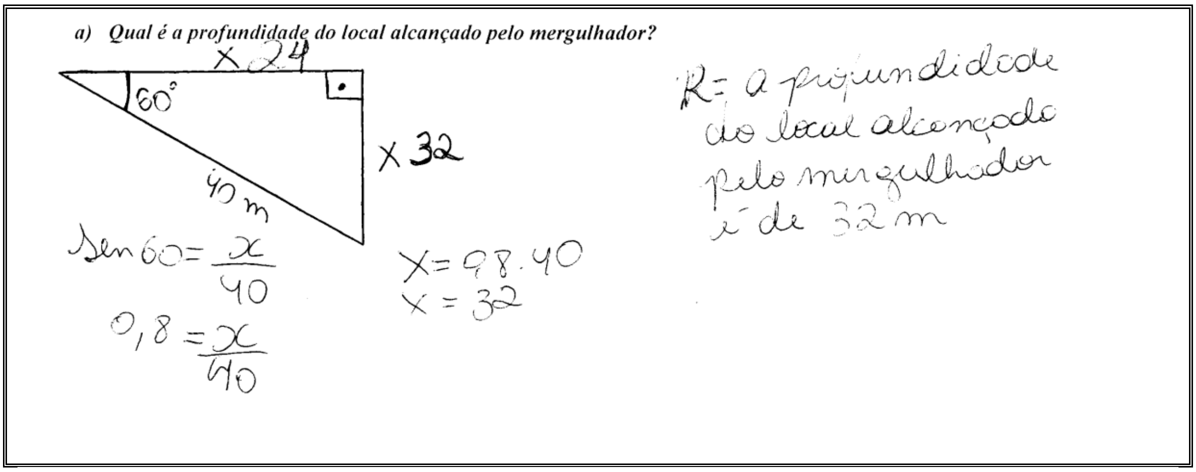


Figura 5.

Essa situação procurou investigar se os alunos reconhecem a equação trigonométrica — que está apresentada na língua natural —, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo e como eles desenvolvem a resolução da equação. A **dupla 1** realizou o que havíamos previsto.

Em nossa análise *preliminar,* acreditamos que, mais provavelmente, o problema se remete aos significados processual-tecnicista e intuitivo-pragmático, embora outros significados possam surgir dessa situação.

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

Ainda nessa situação, em que buscamos investigar se o modo como a **dupla 1** resolveu o problema se remete à ideia de equação trigonométrica e/ou ao teorema de Pitágoras, a **dupla 1** satisfez nossas expectativas, como mostra a Figura 6: remeteu-se ao teorema de Pitágoras.

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

R: Sairá a 24 m de distância do ponto em que mergulhou

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$40^2 = 32^2 + c^2$$
$$1600 = 1024 + c^2$$
$$1600 - 1024 = c^2$$
$$c^2 = 576$$
$$c = \sqrt{576}$$
$$c = 24$$

Figura 6

Nessa situação a **dupla 1** contemplou o significado esperado e concluiu, na atividade 2, ter reconhecido a equação que permeava o problema. Verificamos isso na transcrição abaixo.

Transcrição- ***Reconhecemos a equação, porque percebemos que devíamos usar o teorema de Pitágoras que, segundo nossos conceitos, é uma equação, pois tem letras e sinal de (=). Portanto, reconhecemos e utilizamos equação nesta situação.***

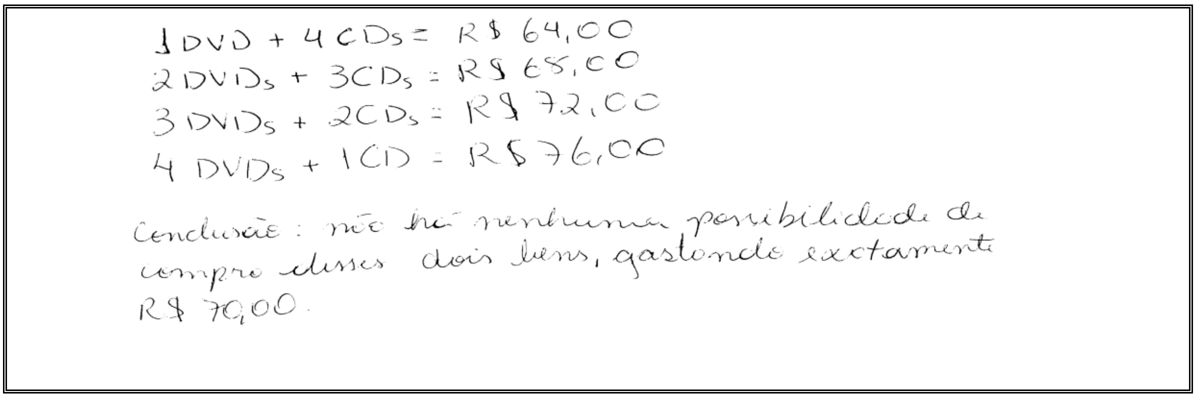
Atividade 1 – Situação e

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?

Nessa situação, conforme indicado na análise *preliminar*, esse item apresenta uma situação matemática que remete ao significado de equação intuitivo-pragmático.

Ao tentar resolver esse item, a **dupla 1** buscou como estratégia de resolução a modelação de algumas possíveis soluções, bem próximas do que prevíamos (estratégia II), e buscou, através de várias tentativas, utilizando a calculadora, encontrar valores que satisfizessem a situação matemática apresentada. Por não encontrar um valor possível, a **dupla 1** anotou quatro tentativas e concluiu que não existe nenhuma possibilidade (Figura 7).

Assim como descrito na análise *preliminar,* a **dupla 1** determinou a equação, fazendo uso da modelagem.


1 DVD + 4 CDs = R$ 64,00
2 DVDs + 3CDs = R$ 68,00
3 DVDs + 2CDs = R$ 72,00
4 DVDs + 1CD = R$ 76,00

Conclusão: não há nenhuma possibilidade de compra desses dois bens, gastando exatamente R$ 70,00.

Figura 7

Percebemos, ao analisar o protocolo abaixo, que a **dupla 1**, em um determinado momento, buscou modelar uma equação para retratar a situação, chegando a valores bem próximos a (x + y = 70), porém não conseguiu conceber a equação 12x+16y=70.

No protocolo acima, notamos que a **dupla 1** fez uso do método das tentativas para resolver o problema, tratando a situação de forma coerente com o significado de equação que ela representa, qual seja, o significado intuitivo-pragmático.

Com relação à atividade 2, a **dupla 1** explicitou, conforme transcrição, que não reconheceu equação, embora os alunos tivessem feito tentativas para resolver o problema.

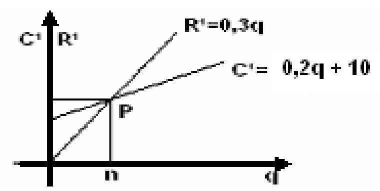
Transcrição - ***Não reconhecemos a equação e muito menos utilizamos. Fizemos tentativas, com somas, para chegar ao resultado, e concluímos que não há nenhuma possibilidade de compra dos bens, gastando exatamente R$ 70,00.***

Atividade 1 – Situação f

Um empres§rio prev° qòu ep aor ac uas t por ot dout -a«l o ñdC

certa quantidade ñqò de geladeiòr, a so bet iad ar eccoemi

a venda de todas as geladeiras produzidas, variam como mostra o gráfico abaixo.



O ponto ñPò indica que o empres§rio n«

com a produção e venda de um certo número de geladeiras. Com qual quantidade de geladeiras esse empresário não terá lucro nem prejuízo?

Nessa situação a **dupla 1** equacionou as duas funções e desenvolveu a equação, conforme mostra a Figura 8.

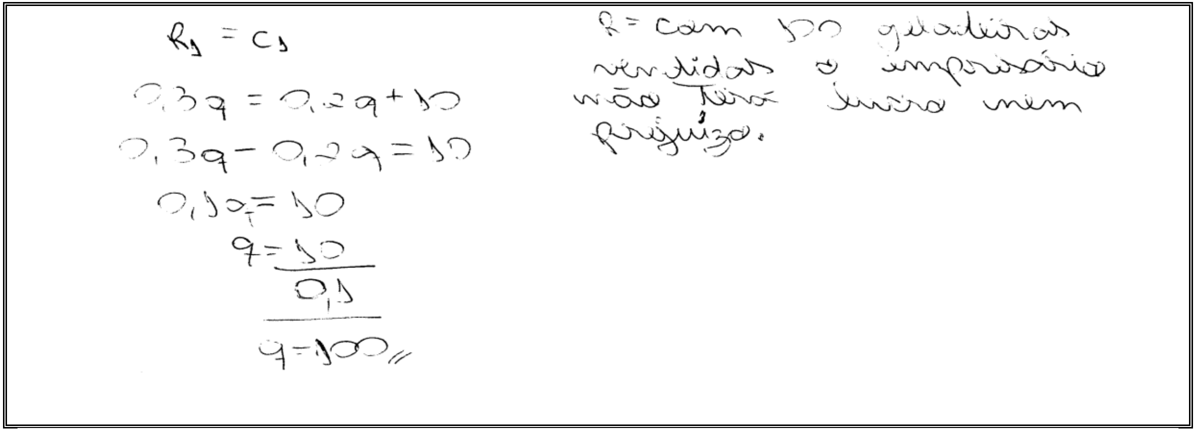


Figura 8

Ainda nessa situação, a **dupla 1** declarou não ter reconhecido a equação, mas concluiu tê-la usado, conforme esta transcrição:

Transcrição – **Não reconhecemos equação, mas utilizamos, pois na forma que resolvemos, fica visível que é uma equação do 1° grau. Nós separamos o que tinha letra de um lado e o que não tinha do outro, etc.**

Nossa análise *preliminar* apontou como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 1º grau, o que entendemos remeter aos significados dedutivo–geométrico e estrutural-conjuntista.

Nessa situação, a **dupla 1** contemplou o significado esperado e concluiu, na atividade 2, ter reconhecido a equação que permeava o problema, conforme revelou a transcrição acima.

Atividade 1 - Situação g

Resolva, em R, determinando o conjunto solução:

$$\log_2(2x-5)=2$$

Para essa situação, desenvolvemos, em nossa análise *preliminar*, uma resolução que se remetesse ao significado processual-tecnicista. A **dupla 1** utilizou-se de três tentativas, conforme revela a Figura 9.

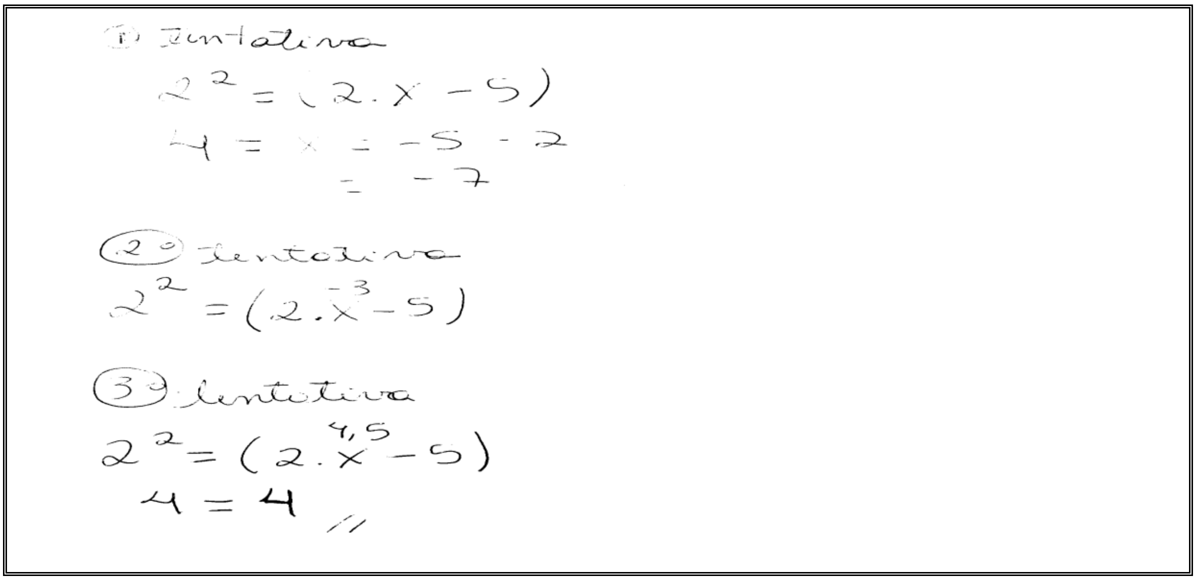


Figura 9

Notamos que em todas as tentativas a **dupla 1** equacionou corretamente a equação logarítmica, porém não desenvolveu uma resolução dentre as previstas em nossa análise preliminar. Os alunos chegaram ao resultado correto da situação, porém não usaram os procedimentos e as técnicas ensinados em sala de aula.

Concluímos, então, que, em uma primeira análise, a **dupla 1** não contemplou o significado processual-tecnicista, porém posteriormente iremos confirmar esse fato, ouvindo o áudio.

Ainda nessa situação, conforme podemos verificar na transcrição abaixo, a **dupla 1** declarou ter reconhecido e utilizado equação, porém não o fez..

Transcrição - ***Reconhecemos e utilizamos equação. Reconhecemos porque sabíamos que tínhamos que resolver o log, que é uma equação. Porém tivemos dificuldade para resolver esta situação, porque não lembramos dos detalhes do log.***

Atividade 1 – Situação h

Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, em função do tempo *t,* em horas, de acordo com a fórmula $m = 3^{2t} + 3^{t+1} - 108$. Assim sendo, calcule o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar esse material antes que ele se volatilize totalmente.

Nesta situação da atividade 1 a **dupla 1** não desenvolveu a resolução da equação exponencial utilizando-se de processos e técnicas, mas sim por tentativas. Nossa análise *preliminar* levantou como possíveis estratégias de resolução da equação exponencial o uso das propriedades das potências ou ainda a elaboração do desenvolvimento da situação, utilizando-se de uma tabela, o que entendemos remeter ao significado processual-tecnicista. Todavia, a **dupla 1** resolveu corretamente a situação, o que podemos constatar na Figura

10. Os dois alunos fizeram três tentativas, substituindo t por (9, 3, e 2) e observaram que o número 2 satisfaz a igualdade. Havíamos previsto essa resolução como possível.

1º tentativa

$$3^{\overbrace{2 \cdot t = 9}^{18}} + 3^{\overbrace{t = 17 + 1}^{18}} - 108 = 0$$

2º tentativa

$$3^{2 \cdot 3 = 6} + 3^{3+1=4} - 108 = 0$$

3º tentativa

$$m = 3^{2 \cdot 2 = 4} + 3^{2+1=3} - 108 = 0$$

$$m = 3^4 + 3^3 - 108 = 0$$

$$m = 81 + 27 - 108 = 0$$

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

R = então t vale 2.

Figura 10

Com relação à atividade 2, a **dupla 1** explicitou, conforme revela a transcrição, que não reconheceu equação na situação a da atividade 1. Além disso, os alunos deixaram claro que não utilizaram equação para encontrar a solução.

Transcrição - ***Não reconhecemos equação, não sabemos se utilizamos. Resolvemos a situa-«o atrav®s de tentativas chegar ao resultado.***

3.4 Análise das situações resolvidas e apresentadas pela dupla 2

Atividade 1 – Situação a

Determine os valores de y para os quais a expressão (y ï 1)^2 é igual a -4y.

Observamos que, nesta situação da atividade 1, a **dupla 2** não desenvolveu a resolução da equação do segundo grau utilizando-se de processos e técnicas. Em nossa análise *preliminar*, supusemos estratégias de resolução com a utilização de Bháskara ou ainda com o desenvolvimento da equação, utilizando-se de produtos notáveis e transformando a equação em um trinômio do quadrado perfeito, o que entendemos que remete ao significado processual-tecnicista.

Porém, a **dupla 2** resolveu corretamente a situação, o que a Figura 11 comprova. Os alunos iniciaram fazendo substituições de y por -3, -4, -2, 5, 4, 3, -7, 0 e, finalmente, por -1 e puderam observar que -1 satisfaz a igualdade. No áudio podemos perceber que a dupla fez os cálculos das substituições na calculadora, por isso escreveu apenas o resultado que satisfazia a solução. Essa resolução havia sido prevista por nós como possível.

Determine os valores de y para quais a expressão (y – 1)² é igual a -4y.

$(-1-1)^2 = -4\cdot(-1)$

$(-2)^2 = 4$

$4 = 4$

Estipulamos valores para y = (-3; -4, -2, 5, 4, 3, -7, 0)...
Até que chegamos a -1
que deixou igual
ambos os partes.

Figura 11

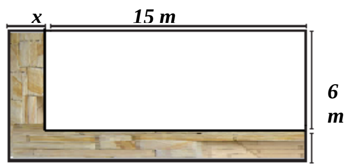
Com relação à atividade 2, a **dupla 2** explicitou, como mostra a transcrição, que não reconheceu equação na situação a) da atividade 1, porém declarou ter utilizado a equação sem perceber.

Situação a → Não reconhecemos que era
uma equação, pois não estava escrita da
forma que estamos acostumados a ver. Mas
sem perceber utilizamos para responder.

Transcrição do protocolo acima - ***Não reconhecemos que era uma equação, pois não estava escrita da forma que estamos acostumados a ver. Mas sem perceber utilizamos para responder.***

Atividade 1 – Situação b

O projeto de um jardim retangular prevê que se coloquem, no seu contorno (formando retângulos), pedras ornamentais, que estão indicadas na figura:



Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de 46 m², calcule a medida x, em metros.

Constatamos que, nesta situação da atividade 1, a **dupla 2** não desenvolveu a resolução da equação do segundo grau, utilizando-se de conceitos de áreas de figuras planas, neste caso área de retângulo. Em nossa análise preliminar, cogitamos como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 2º grau, utilizando as somas algébricas das áreas do retângulo maior para encontrar a equação do 2° grau e resolvê-la, o que entendemos que remete ao significado dedutivo-geométrico e estrutural-generalista. Todavia, como podemos constatar na Figura 12, a **dupla 2** resolveu corretamente a situação. Os alunos fizeram tentativas e, ao substituir x por 2, observaram que esse valor satisfazia a igualdade. Apesar de a **dupla 2** não se remeter à ideia de equação em sua resolução, utilizou uma ideia geométrica, quando calculou a área do retângulo maior e somou com o valor da área ocupada pelas pedras. Conhecendo esse total, a dupla decidiu por uma estratégia: estipular valor para x que chegasse ao total de 136. No áudio, podemos perceber que a dupla fez os cálculos das substituições na calculadora, por isso escreveu apenas o resultado que satisfazia a solução.

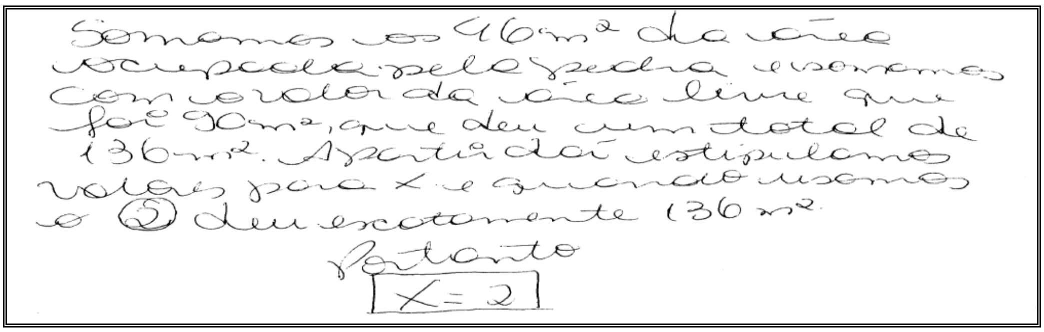

Somamos os 46m² da área ocupada pela pedra e somamos com o valor da área livre que foi 90m², que deu um total de 136m². A partir daí estipulamos valores para x e quando usamos o 2 deu exatamente 136 m².
Portanto
$\boxed{x = 2}$

Figura 12.

Com relação à atividade 2, a transcrição revela que a **dupla 2** explicitou não ter reconhecido equação na situação a) da atividade 1. Além disso, ficou claro que essa dupla não sabia definir o que é equação.

Transcrição - ***Não percebemos que era uma equação. Também achamos que não utilizamos os métodos de uma equação.***

Atividade 1 – Situação c

Observe as seguintes situações e encontre, se possível, valor (es) para x:

a) $(x-a).(x-b)=0$**. Justifique sua resposta (Por quê?).**

Por que você resolveu desta forma a questão?

Nessa situação a **dupla 2** apresentou uma solução em que substituiu x por 2 e depois por 0 em cada fator, porém equivocou-se, ao resolver cada fator. A ideia que está sendo indicada na Figura 13 é de que o produto por zero sempre dá zero, assumindo, assim, a ideia de que, se um produto de dois fatores tem resultado zero, um dos fatores é zero.

$$(2-a).(0 \cdot b)=0$$
$$2.0=0$$

Figura 13

Essa afirmação é escrita pela **dupla 2**, na justificativa apresentada na Figura 13.

Por que você resolveu desta forma a questão?

Porque todo número vezes 0=0

Verificamos, então, que a **dupla 2** não escreveu o desenvolvimento da equação: apenas substituiu a variável para validar a condição, o que revela a Figura 13 e é confirmado na atividade 2, em que a **dupla 2** declarou não saber se utilizou equação, pois descobriu o valor de x por substituição.

Em nossa análise *preliminar,* apontamos como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 1º grau, o que entendemos que remete ao significado estrutural-generalista.

$\frac{(x-a).(x-b)}{(x-a)}=0$ **Justifique sua resposta (Por quê?).**

Por que você resolveu desta forma a questão?

Nessa situação a **dupla 2** apresentou uma solução em que apenas substituiu x por 4 e não deu continuidade ao desenvolvimento da situação; assumiu, assim, a ideia de um produto de dois fatores cujo resultado é zero. Essa afirmação foi escrita pela **dupla 2,** quando apresentou sua justificativa.

Porque toda multiplicação por 0 é igual a zero, mesmo dividindo por outro número.

Constatamos que a **dupla 2** não escreveu o desenvolvimento da equação, apenas substituiu a variável para validar a condição, o que a Figura 14 comprova.

$$\frac{(4-a).(0-b)}{(4.a)} = 0$$

Figura 14

Essa situação não foi resolvida corretamente, pois a **dupla 2** fez uma suposição de que, substituindo x por 4, o resultado da divisão (4-a)/(4-a) seria zero, e sua multiplicação por (0-b) resultaria em zero. Nesse caso, percebemos que a dupla se enganou com o conceito de divisão, gerando, assim, um erro de conclusão. Porém a dupla declarou que reconheceu a equação e a resolveu como equação, o que é confirmado pela transcrição da atividade 2.

Transcrição: ***Reconhecemos que era uma equação pela forma nela expressa e também resolvemos através de uma equação.***

Nossa análise *preliminar* levantou como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 1º grau, com uma simplificação antecipada de (x-a)/(x-a), fazendo, então, x = b, o que entendemos remeter ao significado estrutural-generalista.

Atividade 1 – Situação d

Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60° com a superfície.

a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

Nessa situação, inicialmente a **dupla 2** procurou traduzir o problema para uma figura, o que facilitou a compreensão. Em seguida, como havíamos previsto na análise preliminar, aplicou a relação trigonométrica do seno, conforme ilustra a Figura 15.

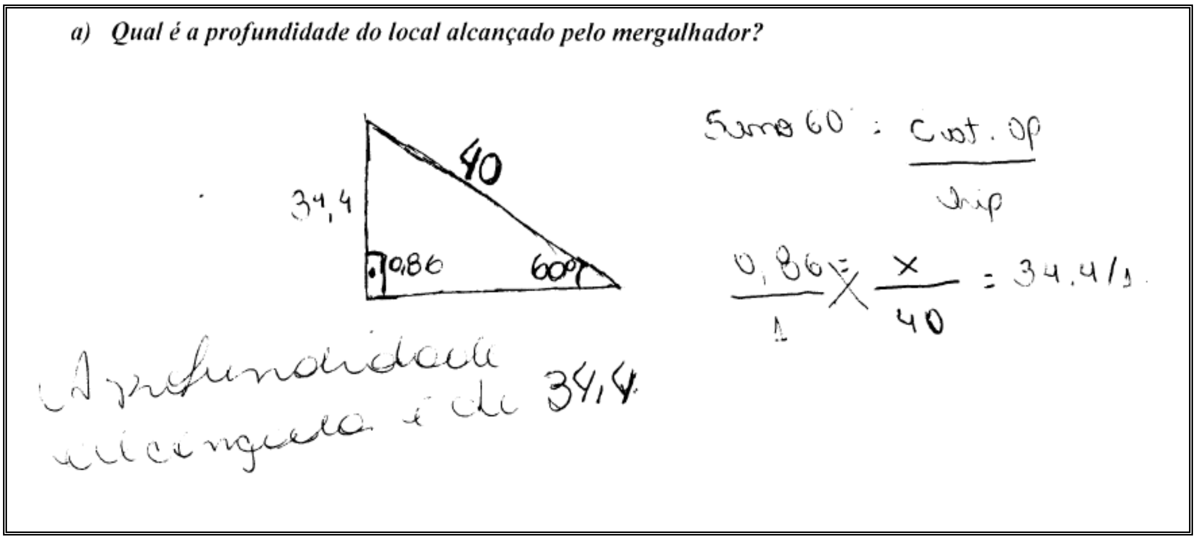


Figura 15.

Essa situação que apresentamos buscou investigar se os alunos reconhecem a equação trigonométrica — apresentada na língua natural —, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo; e como eles desenvolvem a resolução da equação. A **dupla 2** realizou o que havíamos previsto.

Em nossa análise *preliminar*, acreditamos que o problema se remete aos significados processual-tecnicista e intuitivo-pragmático, pois, embora outros significados possam surgir dessa situação, acreditamos que esses sejam os mais prováveis.

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

Ainda nessa situação, buscamos verificar se a maneira com que a **dupla 2** resolve o problema se remete à ideia de equação trigonométrica e/ou ao teorema de Pitágoras. A **dupla 2** remeteu-se à ideia de equação trigonométrica, utilizando a relação do cosseno, satisfazendo nossas expectativas, como mostra a Figura 16.

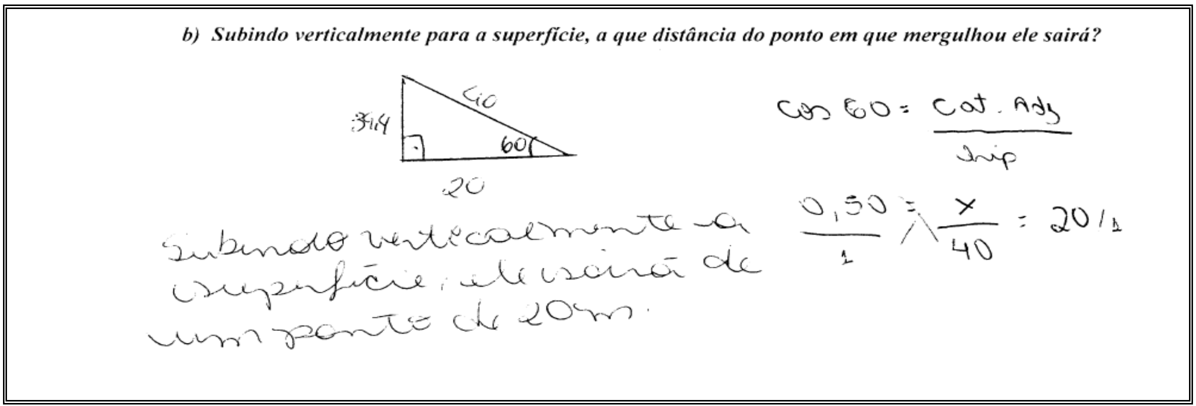


Figura 16.

A **dupla 2** contemplou, nessa situação, o significado esperado e concluiu, na atividade 2, não ter reconhecido a equação que permeava o problema. Verificamos isso na transcrição abaixo.

Transcrição – ***Não reconhecemos nenhuma equação. Nessa situação usamos seno e cosseno, que não são equações. Para resolver cada um tinha um sinal de igual, mas era razão.***

Atividade 1 – Situação e

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?

Conforme indicado na análise *preliminar,* esse item apresenta uma situação matemática que remete ao significado intuitivo-pragmático de equação.

Para resolver esse item, a **dupla 2** escolheu como estratégia de resolução a multiplicação de 12 por 16, concluindo que sempre iria faltar ou sobrar, e nunca se chegaria ao resultado de 70. Por não ter encontrado um valor possível, a **dupla 2** concluiu que não existe nenhuma possibilidade de solução (Figura 17).

A **dupla 2** não desenvolveu nenhum raciocínio utilizando-se de equação; simplesmente descreveu por que, na sua opinião, a situação não tem solução.

Se multiplicarmos (12.16=(192)
(que é o valor do cd pelo dvd
é (igual) 192) possibilidades
Porém, essas possibilidades
sempre faltaram ou sobraram,
Portanto, não vemos nenhuma
possibilidade dela gastar exatamente
R$ 70,00.

Figura 17.

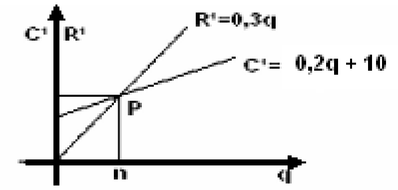
A análise do protocolo abaixo indica que a **dupla 2**, em um determinado momento, buscou resolver por tentativas, porém, em seu desenvolvimento, só percebemos uma única tentativa. No áudio, podemos observar que os alunos fizeram tentativas na calculadora, mas não fizeram anotações; portanto, podemos concluir que o uso do método das tentativas para resolver o problema fez com que a **dupla 2** se remetesse ao significado de equação que ela representa, qual seja, o significado intuitivo-pragmático.

Com relação à atividade 2, a **dupla 2** explicitou, conforme a transcrição seguinte, que não reconheceu equação, porém fez tentativas para resolver o problema.

Transcrição - ***Não usamos, só fizemos tentativas para encontrar a resposta. Não tinha equação nessa situação.***

Atividade 1 – Situação f

Um empres§rio prev° quųèe poarcausat oprtoodua-l« oñ Cd certa quantidade ñqò de geĮòa, deoibrtaisdae caom a venda de todas as geladeiras produzidas, variam como mostra o gráfico abaixo.



O ponto ñPò indica que o empres§rio n«

com a produção e venda de um certo número de geladeiras. Com qual quantidade de geladeiras esse empresário não terá lucro nem prejuízo?

Nessa situação a **dupla 2** equacionou as duas funções e desenvolveu a equação, porém não chegou à resposta correta, conforme a Figura 18 revela.

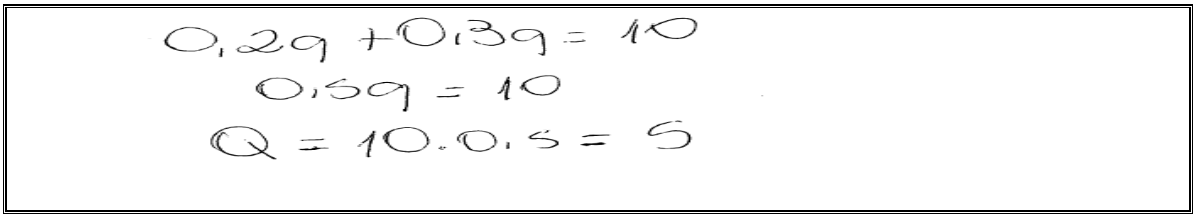


Figura 18

Ao isolar “q”, a **dupla 2** não aplicoou a operação correta, que era a divisão por 0,5. Ainda nessa situação, a **dupla 2** declarou não saber se reconheceu, mas concluiu ter usado equação, conforme esta transcrição:

Transcrição – ***Usamos, mas não sabemos direito. Acho que tem equação porque tem letra e sinal de igual.***

A análise *preliminar* apontou a utilização de equação do 1º grau como possível estratégia de resolução, o que entendemos que remete aos significados dedutivo-geométrico e estrutural-conjuntista.

Nessa situação a **dupla 2** contemplou o significado esperado e concluiu, na atividade 2, ter usado a equação que permeava o problema. A transcrição acima demonstra isso.

Atividade 1 – Situação g

Resolva, em R, determinando o conjunto solução:

$$\log_2(2x-5)=2$$

Para essa situação, desenvolvemos uma resolução, em nossa análise preliminar, que se remete ao significado processual-tecnicista. A **dupla 2** desenvolveu a resolução da forma esperada: utilizou a resolução da definição de logaritmo, exposta na Figura 19.

$$Log_2(2x-5)=2$$
$$2^2=(2x-5)$$
$$4=2x-5$$
$$4+5=2x$$
$$9=2x$$
$$\frac{9}{2}=x$$
$$x=4{,}5$$

Figura 19.

Notamos que a **dupla 2** equacionou corretamente a equação logarítmica e desenvolveu uma resolução dentre as previstas em nossa análise *preliminar*. Os alunos chegaram ao resultado correto da situação, usando os procedimentos e as técnicas ensinados em sala de aula. A **dupla 2,** conforme a transcrição abaixo, declarou ter utilizado equação.

Concluímos, então, que, em uma primeira análise, a **dupla 2** contemplou o significado processual-tecnicista.

Transcrição - ***Usamos a equação logarítmica***

Atividade 1 – Situação h

Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, em função do tempo *t,* em horas, de acordo com a fórmula $m = 3^{2t} + 3^{t+1} - 108$. Assim sendo, calcule o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar esse material antes que ele se volatilize totalmente.

Nesta situação da atividade 1 a **dupla 2** não se utilizou de processos e técnicas para desenvolver a resolução da equação exponencial, mas de um método denominado por eles de “chute”. Em nossa análise *preliminar*, levantamos como possíveis estratégias de resolução da equação exponencial o uso das propriedades das potências ou, ainda, o desenvolvimento da situação, utilizando-se de uma tabela, o que entendemos que remete ao significado processual-tecnicista. Todavia, a **dupla 2** resolveu corretamente a situação, o que podemos constatar na Figura 20. Eles “chutaram” o número 2, substituindo t por 2, e observaram que o número 2 satisfaz a igualdade. Havíamos previsto essa resolução como possível.

Vamos chutar 2

$m = 3^4 + 3^3 - 108$

$m = 81 + 27 - 108$

$m = 108 - 108$

$m = 0$

O tempo é 2.

Figura 20

No que se refere à atividade 2, a **dupla 2** explicitou, conforme a transcrição abaixo, que não reconheceu nenhuma equação. Além disso, deixou claro que não utilizou equação para encontrar a solução.

Transcrição - ***Não sabíamos se existia uma equação, porque só chutamos um valor para t e resolvemos a conta. Acho que isso não é equação.***

3.5 Análise das situações resolvidas e apresentadas pela dupla 5

Atividade 1 – Situação a

Determine os valores de y para os quais a expressão (y ï 1)^2 é igual a -4y.

Nesta situação da atividade 1 a **dupla 5** valeu-se de processos e técnicas para desenvolver a resolução da equação do segundo grau. Na análise *preliminar*, apontamos como possíveis estratégias de resolução a utilização de Bháskara ou o desenvolvimento da equação, com a utilização de produtos notáveis, transformando a equação em um trinômio do quadrado perfeito, o que, segundo nosso entender,remete ao significado processual-tecnicista.

A **dupla 5** resolveu corretamente a situação, o que podemos constatar na Figura 21. Os alunos iniciaram fazendo o desenvolvimento do quadrado da diferença, reduzindo os termos semelhantes, escrevendo a equação do segundo grau em sua forma normal ($ax^2+bx+c=0$). Em seguida, a dupla resolveu a equação, aplicando a fórmula de Bháskara e chegou ao resultado correto. Essa resolução havia sido prevista por nós como possível.

Determine os valores de y para quais a expressão (y – 1)² é igual a -4y.

$$(y-1)^2 = -4y$$

$$(y-1)\cdot(y-1)+4y=0$$

$$y^2-2y+1+4y=0$$

$$y^2+2y+1=0$$

$a=1$ $\Delta = 2^2-4\cdot1\cdot1$

$b=2$ $\Delta = 4-4$

$c=1$ $\Delta = 0$

$$y=\frac{-2\pm0}{2\cdot1}=\frac{-2}{2}=-1$$

Figura 21.

Com relação à atividade 2, a **dupla 5** explicitou, conforme podemos constatar na transcrição, que reconheceu equação na situação, da atividade 1 e declarou ter utilizado a equação.

Transcrição - ***Sim, reconhecemos e usamos equação do 2º grau.***

Atividade 1 – Situação-b

O projeto de um jardim retangular prevê que se coloquem, no seu contorno (formando retângulos), pedras ornamentais, que estão indicadas na figura:

Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de 46 m², calcule a medida x, em metros.

Nesta situação da atividade 1, a **dupla 5** não desenvolveu a resolução da equação do segundo grau utilizando-se de conceitos de áreas de figuras planas, neste caso, área de retângulo. Em nossa análise preliminar, levantamos como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 2º grau, empregando as somas algébricas das áreas do retângulo maior para encontrar a equação do 2° grau e resolvê-la, o que julgamos remeter ao significado dedutivo-geométrico e estrutural-generalista.

Todavia, a **dupla 5** resolveu corretamente a situação, o que comprova a Figura 22. Os alunos fizeram duas tentativas: uma substituindo x por 1 e outra, por 2; e, ao substituir x por 2, observaram que o resultado da multiplicação de 17 por 8, subtraído pelo resultado da multiplicação de 15 por 6, dava 46, que é o valor da área ocupada pelas pedras. Apesar de a **dupla 5** não se remeter à ideia de equação em sua resolução, utilizou uma ideia geométrica, quando calculou a área do retângulo maior e subtraiu o valor da área que não está ocupada pelas pedras. Conhecendo esse total, a dupla decidiu por uma estratégia: “chutar” dois valores para x que chegassem ao total de 136.

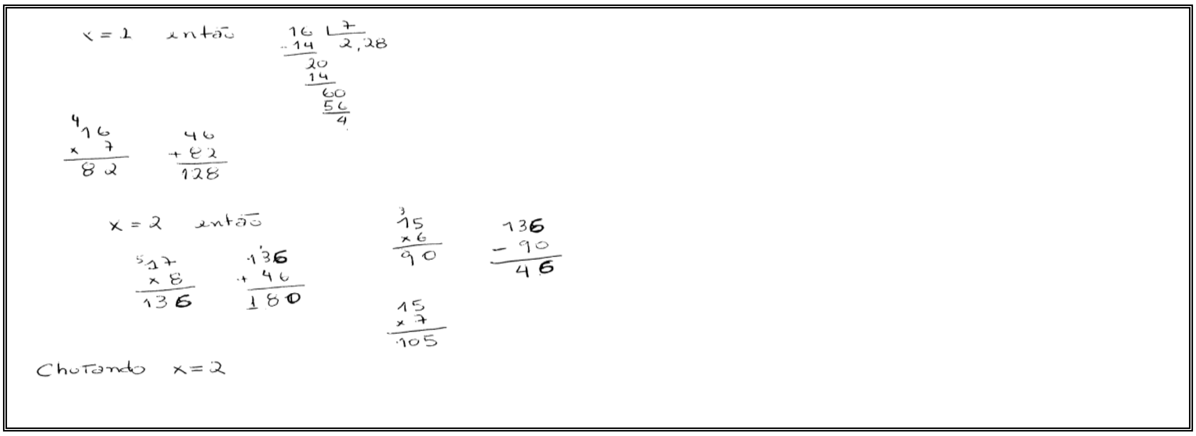


Figura 22.

Referindo-se à atividade 2, a **dupla 5** relatou, conforme pode ser constatado na transcrição, que não reconheceu equação na situação b) da atividade 1. Além disso, deixou claro que não sabe definir o que é equação.

Transcrição - ***Não reconhecemos o que fizemos foi continhas para achar o valor. Não conseguimos escrever com equação porque não sabemos.***

Atividade 1 – Situação c

Observe as seguintes situações e encontre, se possível, valor (es) para x:

$(x - a).(x - b) = 0$ **Justifique sua resposta (Por quê?).**

Por que você resolveu desta forma a questão?

Nessa situação a **dupla 5** apresentou uma solução em que substituiu “x” por 1 e “a” por 1 também, em cada fator. A ideia que está sendo indicada na Figura 23 é de que o produto por zero sempre dá zero, assumindo, assim, a ideia de que, havendo um produto de dois fatores cujo resultado é zero, um dos fatores é zero; nesse caso, os dois fatores são zeros. A **dupla 5** não se lembrou da situação em que, se um dos fatores for zero, o produto será zero.

Figura 23

Essa afirmação foi escrita pela **dupla 5,** quando apresentou a justificativa exposta na Figura 23.

Porque para o numero terminar como resultado zero ele tem que ser subtraido por ele mesmo.

Notamos, então, que a **dupla 5** não escreveu o desenvolvimento da equação, apenas substituiu todas as variáveis pelo mesmo número; dessa maneira, os alunos não resolveram a equação corretamente, o que é confirmado na atividade 2, em que a **dupla 5** declarou não saber se utilizou equação, pois não havia números, e, para eles, isso não parecia equação.

Em nossa análise *preliminar,* apontamos como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 1º grau, o que entendemos que remete ao significado estrutural-generalista.

Atividade 1 – Situação c

$\frac{(x-a).(x-b)}{(x-a)}=0$. **Justifique sua resposta (Por quê?).**

Por que você resolveu desta forma a questão?

Nessa situação a **dupla 5** apresentou uma solução em que substituiu x por 2 e “a” e “b” também por 2, porém não houve continuidade no desenvolvimento da situação, assumindo, assim, a ideia de que, em um produto de dois fatores um dos quais é zero, o resultado é zero. Porém a resolução da **dupla 5**, contém um erro, pois, nesse caso, temos a divisão de zero por zero, que consiste em uma indeterminação matemática, ou seja, não existe, e a **dupla** não atentou para isso. Essa afirmação foi registrada pela **dupla 5**, quando justificou sua resposta.

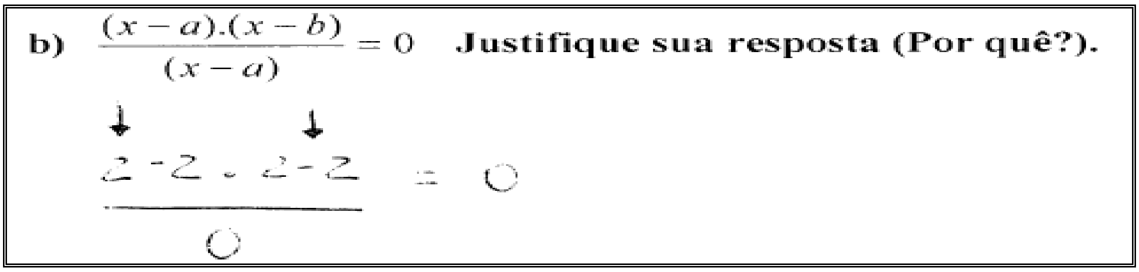


Figura 24.

A **dupla 5** não escreveu o desenvolvimento da equação, apenas substituiu todas as variáveis para, assim, tentar validar a condição, o que é revelado na Figura 24.

Verificamos que a **dupla 5** se enganou com o conceito de divisão, gerando um erro de conclusão. Em sua justificativa, a **dupla** descreveu que, para um resultado ser zero, é necessário que seja subtraído dele mesmo, o que não está errado, porém, nesse contexto, o correto seria dizer que o produto zero provém de um dos fatores ser zero.

Nessa situação a **dupla 5** não contemplou o significado esperado e concluiu, na atividade 2, não ter reconhecido a equação que permeava o problema. Verificamos isso na transcrição abaixo.

Transcrição: ***Não reconhecemos que elas não têm números, achamos que faltaram os números. Mas parecem com equações.***

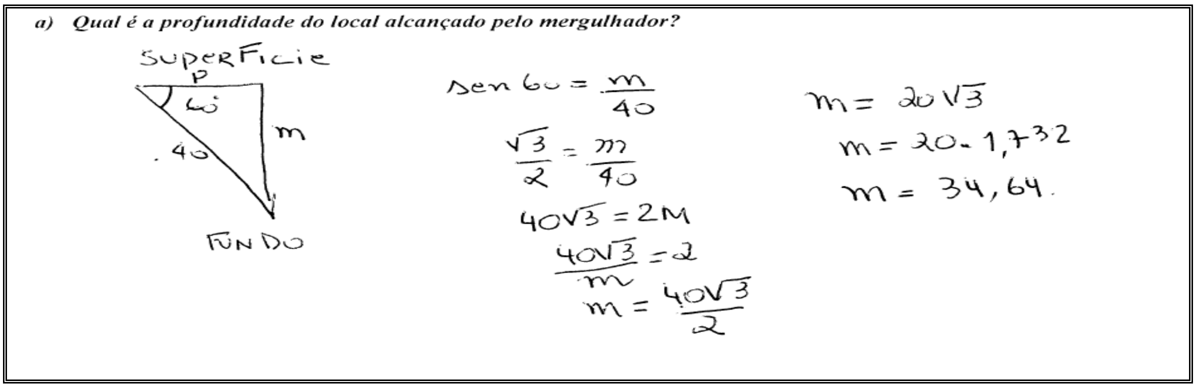
Em nossa análise *preliminar,* levantamos como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 1º grau, com uma simplificação antecipada de (x-a)/(x-a), fazendo, então, x = b, o que entendemos remeter ao significado estrutural-generalista.

Atividade 1 – Situação d

Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60° com a superfície.

a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

Nessa situação, inicialmente a **dupla 5** também procurou traduzir o problema por meio de uma figura, o que facilitou a compreensão. Em seguida, aplicou a relação trigonométrica do seno, como havíamos previsto em nossa análise preliminar, conforme mostra a Figura 25.


a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

$sen\ 60 = \frac{m}{40}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{40}$

$40\sqrt{3} = 2M$

$\frac{40\sqrt{3}}{m} = 2$

$m = \frac{40\sqrt{3}}{2}$

$m = 20\sqrt{3}$

$m = 20 \cdot 1{,}732$

$m = 34{,}64.$

Figura 25

Essa situação que apresentamos procurou investigar se os alunos reconhecem a equação trigonométrica — que está apresentada na língua natural

—, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo; e como eles desenvolvem a resolução da equação. Nesse sentido, a **dupla 5** realizou o que havíamos previsto.

Em nossa análise *preliminar*, acreditamos que o problema se remete aos significados processual-tecnicista e intuitivo-pragmático, que julgamos os mais prováveis, embora outros significados possam surgir dessa situação.

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

Ainda nessa situação, procuramos investigar se a maneira com que a **dupla 5** resolveu o problema se remete à ideia de equação trigonométrica e/ou ao teorema de Pitágoras. Nessa situação, a **dupla 5** utilizou para sua resolução o teorema de Pitágoras, como havíamos também previsto em nossa resolução preliminar, o que satisfez nossas expectativas, como mostra a Figura 26.

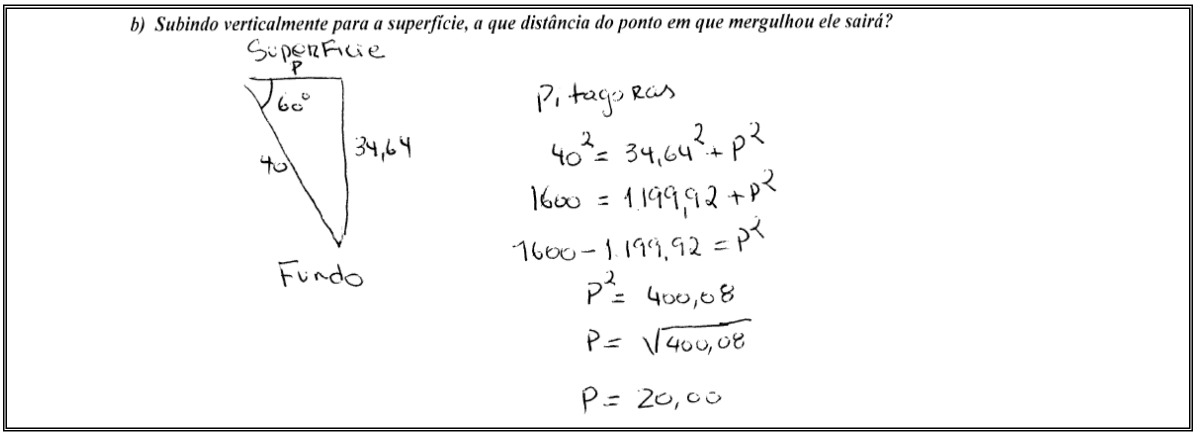


Figura 26.

Nessa situação, a **dupla 5** contemplou o significado esperado, pois desenvolveu a situação corretamente e declarou, na atividade 2, ter reconhecido a equação que permeava o problema. Isso está claro na transcrição abaixo.

Transcrição – ***Sim, reconhecemos e usamos a equação seno e de Pitágoras.***

Atividade 1 – Situação e

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?

Essa situação, como indicamos na análise preliminar, se remete ao significado de equação intuitivo-pragmático.

Para essa situação, a **dupla 5** buscou como estratégia de resolução um método aritmético, realizando duas somas e concluindo que na soma sempre irá faltar ou sobrar 2 e nunca se chegará ao resultado de 70. Por não encontrar um valor possível, a **dupla 5** concluiu que não existe nenhuma possibilidade (Figura 27).

A **dupla 5** não desenvolveu nenhum raciocínio utilizando-se de equação; simplesmente descreveu, utilizando-se da aritmética, porque, na opinião dos alunos, a situação não tem solução.

48=3DVD's +24=2CD's 72	36=3CD's +32=2DVD's 68	As possibilidades de compra são 0 pois sempre irá faltar 2 ou sobrar 2.

Figura 27.

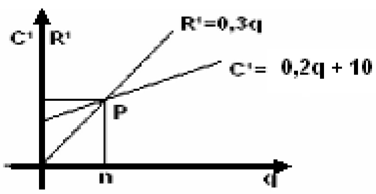
Percebemos, ao analisar o protocolo abaixo, que a **dupla 5**, em um determinado momento, buscou resolver por duas tentativas, porém, em seu desenvolvimento, não utilizou a equação para, de forma explícita, remeter-se ao significado de equação que ela representa, qual seja, o significado intuitivo-pragmático.

Com relação à atividade 2, a **dupla 5** explicitou, conforme transcrição, que não reconheceu equação e que não há equação na situação, pois basta fazer continhas.

Transcrição - ***Não usamos, porque não tem equação. É só fazer continhas***

Atividade 1 – Situação f

Um empres§rio prev° qòu ep aor ac uas t por ot dout -a«l o ñdC certa quantidade ñqò de gelòa, deoibrtaisdae cao m a venda de todas as geladeiras produzidas, variam como mostra o gráfico abaixo.



O ponto ñPò indica que o empresário n« nem prejuízo com a produção e venda de um certo número de geladeiras. Com qual quantidade de geladeiras, esse empresário não terá lucro nem prejuízo?

Nessa situação a **dupla 5** equacionou as duas funções e desenvolveu a equação, porém não chegou à resposta correta, pois cometeu um engano, quando escreveu os números decimais em fração, conforme mostra a Figura 28.

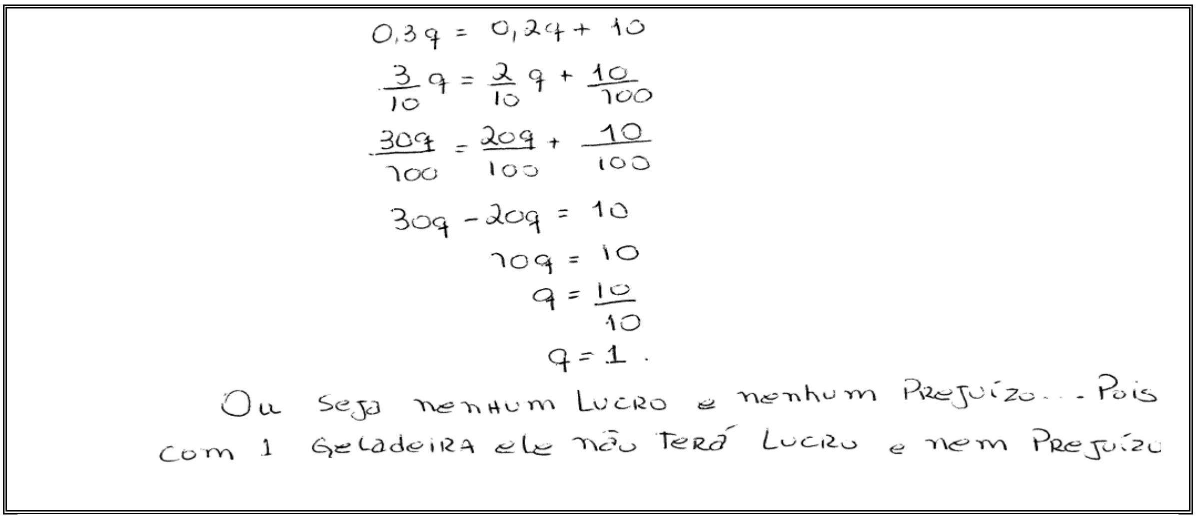


Figura 28

Ao representar a igualdade 10 em fração, a **dupla 5** cometeu um equívoco, fazendo com que o resultado no final da resolução fosse 10, e não o correto, 100 geladeiras. Ainda nessa situação, a **dupla 5** utilizou-se da equação para desenvolver a situação e reconheceu o objeto como equação com frações, conforme revela a transcrição.

Transcrição – ***Sim, usamos equações com fração.***

Em nossa análise *preliminar,* apontamos como possível estratégia de resolução a utilização de equação do 1º grau, o que entendemos que remete aos significados dedutivo-geométrico e ao estrutural-conjuntista.

Nessa situação a **dupla 5** contemplou o significado esperado e concluiu, na atividade 2, ter usado a equação que permeava o problema; a transcrição acima revela isso.

Atividade 1 – Situação g

Resolva, em R, determinando o conjunto solução:

$\log_2(2x-5)=2$

Na resolução desenvolvida pela **dupla 5**, verificamos que os alunos desenvolveram a resolução da forma esperada, utilizaram a resolução da definição de logaritmo, conforme mostra Figura 29.

Para essa situação, em nossa análise preliminar, também desenvolvemos a estratégia pelo método processual, o qual se remete ao significado processual-tecnicista.

$$\log_2 2x-5 = 2$$

$$4 = 2x - 5$$

$$4 + 5 = 2x$$

$$2x = 9$$

$$x = \frac{9}{2}$$

Figura 29.

A **dupla 5** equacionou corretamente a equação logarítmica e desenvolveu uma resolução dentre as previstas em nossa análise *preliminar*. Os alunos chegaram ao resultado correto da situação, usando os procedimentos e as técnicas que aprenderam.

Concluímos, então, que a **dupla 5** contemplou o significado processual-tecnicista, utilizando, em sua resolução, a definição do logaritmo e chegando, assim, ao resultado correto.

Ainda nessa situação a **dupla 5** declarou ter utilizado equação, o que podemos constatar na transcrição abaixo.

Transcrição - ***Sim, usamos a equação logarítmica que estudamos no 2º ano.***

Atividade 1 – Situação h

Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, em função do tempo *t*, em horas, de acordo com a fórmula $m = 3^{2t} + 3^{t+1} - 108$. Assim sendo, calcule o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar esse material antes que ele se volatilize totalmente.

Nesta situação da atividade 1, a **dupla 5** não desenvolveu a resolução da equação exponencial utilizando-se de processos e técnicas: desenvolveu as potências, sem levar em consideração o expoente algébrico.

Em nossa análise *preliminar*, indicamos como possíveis estratégias de resolução da equação exponencial o uso das propriedades das potências ou o desenvolvimento da situação, utilizando-se de uma tabela, o que entendemos que remete ao significado processual-tecnicista. Todavia, a **dupla 5** não resolveu corretamente a situação, o que a Figura 30 permite constatar.

$m = 3^{2T} + 3^{T+1} - 108$

$m = 9 + 3^{1} - 108$

$m = 12 - 108$

$m = 96$ minutos

$T = 1$

Figura 30.

Com relação à atividade 2, a **dupla 5** explicitou, conforme revela a transcrição, que não reconheceu nenhuma equação e que na realidade os alunos não se lembraram de como resolver a situação.

Transcrição - ***Não usamos, pois aqui foi só chutar um número para o expoente e fazer as contas. Fizemos, mas não sabemos se está certo, porque agora parece que é uma equação, mas também não lembramos como fazer.***

Apresentamos, neste capítulo, o desenvolvimento das atividades 1 e 2 das **duplas 1, 2 e 5,** bem como uma análise preliminar, indicando os significados contemplados nas situações da atividade 1. Além disso, transcrevemos as respostas apresentadas na atividade 2 sobre ter ou não identificado o objeto de estudo, em nosso caso, a equação.

Passaremos agora para o capítulo 4, onde faremos as discussões das atividades 1 e 2, desenvolvendo um comparativo por **duplas**. Em seguida, exporemos nossas conclusões e considerações, apontando a necessidade de trabalhar com diferentes significados para a noção de equação e os possíveis caminhos para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 Introdução

Desenvolvemos uma análise preliminar no capítulo anterior, apontando os significados e o objeto de pesquisa por dupla. Neste capítulo, traçaremos um panorama sobre a concepção de equação e os significados utilizados pelos alunos, baseado nos resultados por duplas, em cada situação das atividades 1 e 2. Procuraremos, então, desenvolver uma análise comparativa, identificando as relações entre as concepções de equação por dupla. Ainda neste último capítulo, indicaremos, em nossas considerações finais, reflexões para futuras pesquisas.

4.2 Análises Comparativas entre as Situações Desenvolvidas por Duplas

Como apresentamos inicialmente, neste capítulo desenvolveremos um estudo comparativo entre as duplas, considerando as atividades 1 e 2. Retomaremos ainda os objetivos iniciais de cada situação, bem como as análises preliminares das situações-problema que compuseram nosso instrumento de coleta de dados.

Considerando o objetivo da pesquisa, qual seja, investigar as concepções de equação dos alunos do Ensino Médio, verificando quais os significados de equações presentes em suas concepções, ratificamos que nosso trabalho está fundamentado na tese de doutoramento de Ribeiro (2007).

Nesse sentido, iniciaremos estas análises, retomando os significados de equação presentes nas situações da atividade 1 e da atividade 2, apresentadas por nós no capítulo 2 deste texto. Após esta retomada, partiremos para as análises comparativas das duplas.

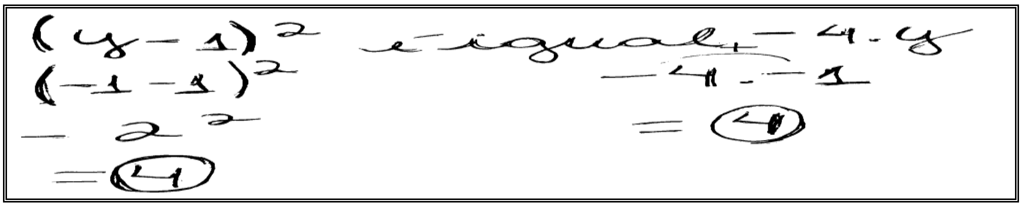
Gostaríamos de lembrar que a atividade 1 foi dividida em oito situações e tinha por objetivo principal verificar se, nas soluções apresentadas pelas duplas, seriam contemplados os diferentes significados de equação que compõem os *Multisignificados de Equação* (Ribeiro, 2007).

Em nossas análises preliminares, o significado de equação processual-tecnicista foi contemplado na atividade 1 nas seguintes situações: *ñ a, ò ñ d ò ;* e *ñ g ò ñ h ò*. O significado dedutivo-geométrico foi contemplado nas situações *ñ b ò* e *ñ f ò* da atividade 1. O significado estrutural-generalista, na situação *ñ c ò*. Ainda na atividade 1, as situações *ñ d ò* e *ñ e ò* contemplaram o significado intuitivo-pragmático; e a situação *ñ f ò* o significado estrutural-conjuntista.

Iniciaremos agora as análises comparativas das duplas 1, 2 e 5, nas situações *ñ a, ò ñ d ò ;* e *ñ h ò*, ***g*** da atividade 1, que envolvem o significado processual-tecnicista.

Em suas resoluções, as duplas 1 e 2 não contemplaram o significado esperado na ***s i t u a -*** ,«pois, em seu desenvolvimento, os alunos utilizaram o método de tentativas. Por outro lado, a **dupla 5** abordou o significado esperado, desenvolvendo suas resoluções a partir do uso do produto notável para escrever a equação e, em seguida, encontrar a solução, resolvendo a equação pela “fórmula de Bháskara”. Podemos verificar as resoluções das duplas 1, 2 e 5 nos protocolos abaixo:

Dupla 1



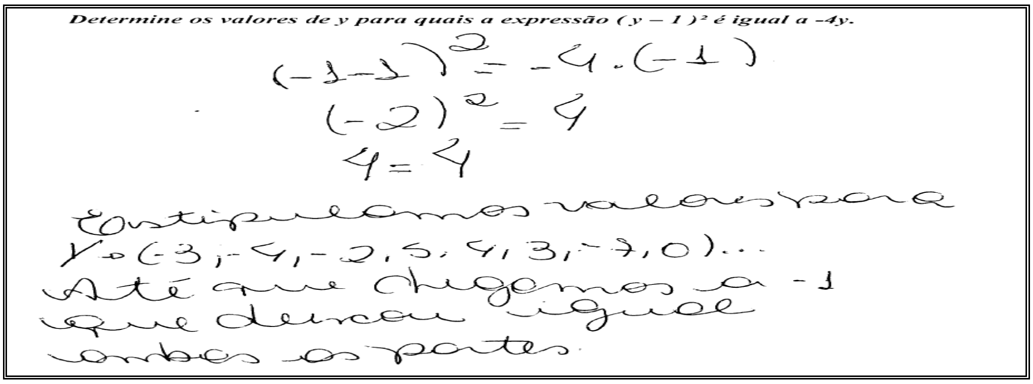
$(y-1)^2$ é igual $-4 \cdot y$

$(-1-1)^2 \qquad -4 \cdot -1$

$= 2^2 \qquad = 4$

$= 4$

Dupla 2



Determine os valores de y para quais a expressão (y – 1)² é igual a -4y.

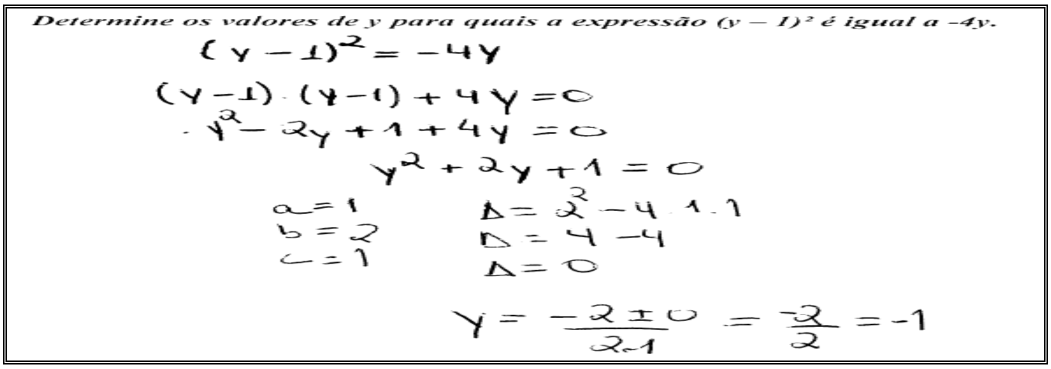
$(-1-1)^2 = -4 \cdot (-1)$

$(-2)^2 = 4$

$4 = 4$

Estipulamos valores para y (-3, -4, -2, 5, 4, 3, -7, 0)... Até que chegamos a -1 que deixou igual ambas as partes.

Dupla 5



Determine os valores de y para quais a expressão (y – 1)² é igual a -4y.

$(y-1)^2 = -4y$

$(y-1) \cdot (y-1) + 4y = 0$

$y^2 - 2y + 1 + 4y = 0$

$y^2 + 2y + 1 = 0$

$a = 1 \qquad \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$

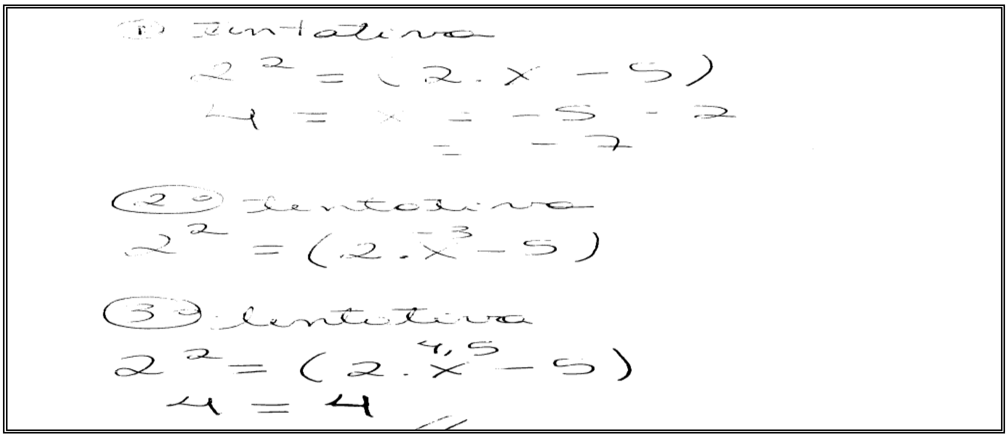
$b = 2 \qquad \Delta = 4 - 4$

$c = 1 \qquad \Delta = 0$

$y = \frac{-2 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$

Na ***situação***, as duplas utilizaram o significado esperado, desenvolvendo a situação com o uso das relações trigonométricas no triângulo retângulo, assim como a noção intuitiva do teorema de Pitágoras. Já na ***situação***, as duplas 2 e 5 contemplaram o significado proposto, e a **dupla 1** não o fez, pois utilizou-se do método de tentativas, como revela o protocolo a seguir.

Dupla 1



1ª tentativa

$2^2 = (2 . x - 5)$

$4 = x = -5 - 2$

$= -7$

2ª tentativa

$2^2 = (2 . x^{3} - 5)$

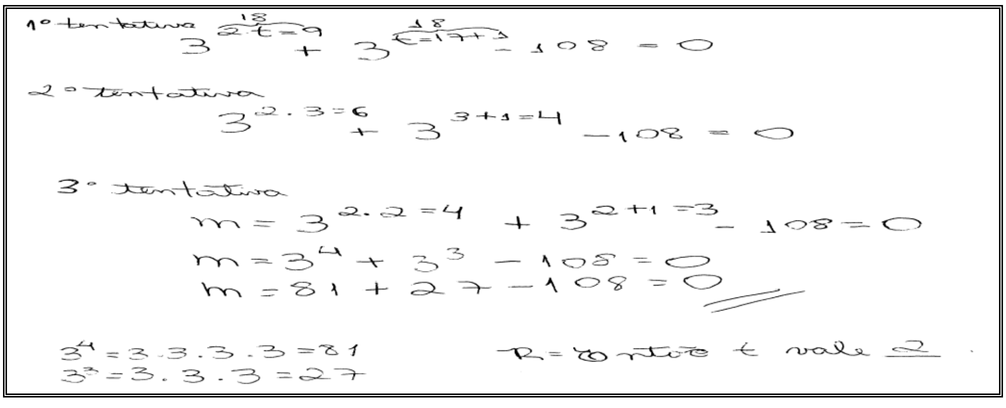
3ª tentativa

$2^2 = (2 . x^{4,5} - 5)$

$4 = 4$

Finalizando a análise comparativa do significado processual-tecnicista contemplado também na **situação** ***ñ h,ò*** pudemos verificar que ele não foi utilizado por nenhuma das duplas. Elas desenvolveram suas estratégias de resolução pelo método de tentativas, e apenas a **dupla 5** não chegou à solução correta. Os protocolos seguintes demonstram as estratégias utilizadas pelas duplas.

Dupla 1



1º tentativa $3^{2.t=9} + 3^{t=17+1} - 108 = 0$

2º tentativa

$3^{2.3=6} + 3^{3+1=4} - 108 = 0$

3º tentativa

$m = 3^{2.2=4} + 3^{2+1=3} - 108 = 0$

$m = 3^4 + 3^3 - 108 = 0$

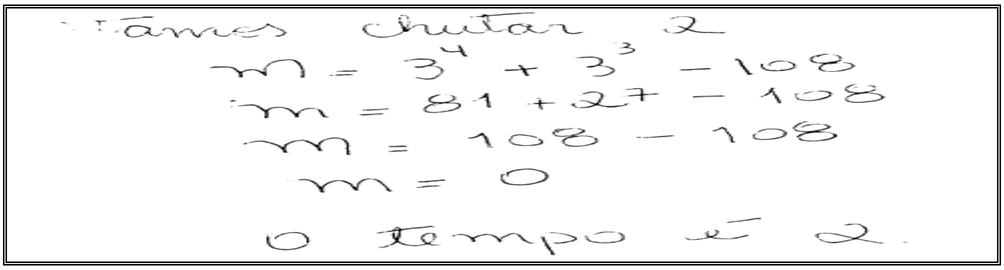
$m = 81 + 27 - 108 = 0$

$3^4 = 3.3.3.3 = 81$

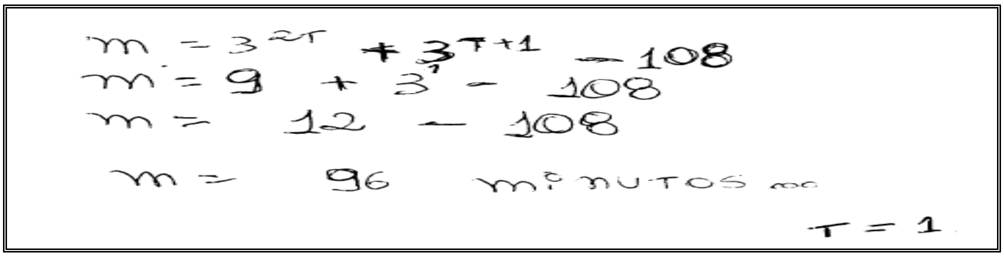
$3^3 = 3.3.3 = 27$

R= Então t vale 2

Dupla 2

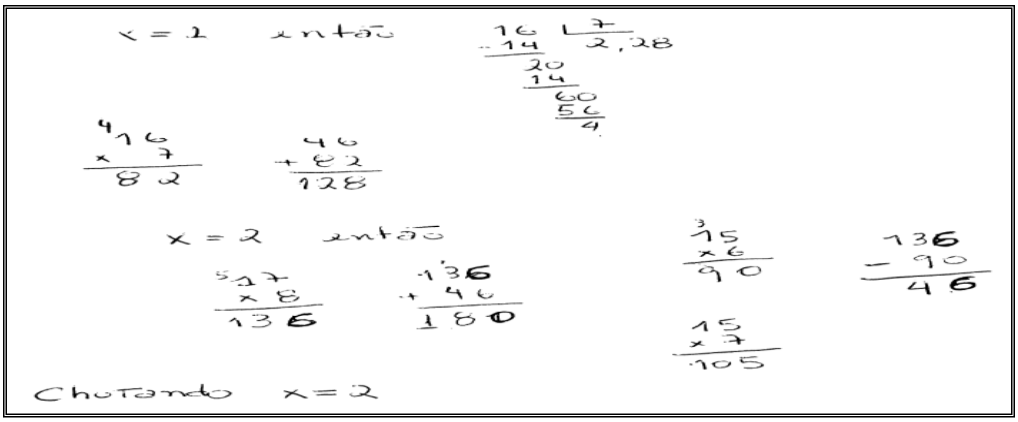


Dupla 5



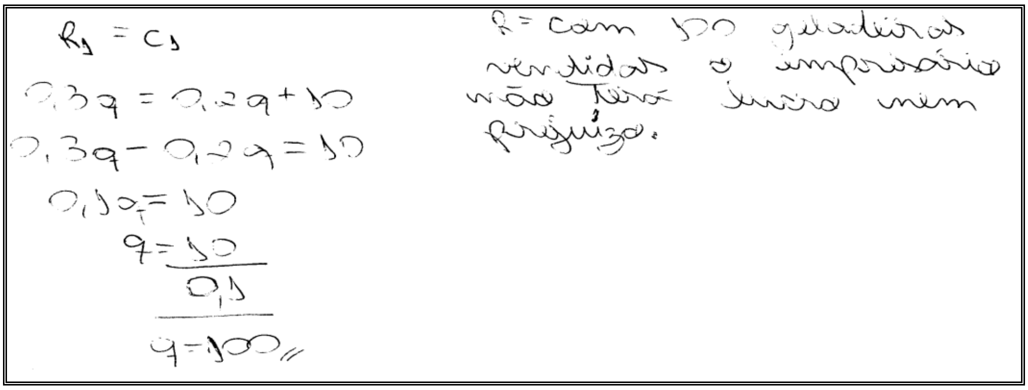
Passamos agora para a análise comparativa das ***s i t u a - » e s ò ñ b ò e*** que, segundo nossas análises preliminares, contemplavam o significado dedutivo-geométrico. Na ***s i t u a - « o ñ b ò*** as duplas desenvolveram suas resoluções, chegando ao resultado correto, porém não utilizaram o significado esperado. Vale ressaltar que as duplas se utilizaram do método de tentativas, e a **dupla 5** apresentou em sua estratégia as operações aritméticas por meio da ideia de “arme e efetue”, a qual apresentamos no protocolo abaixo.

Dupla 5



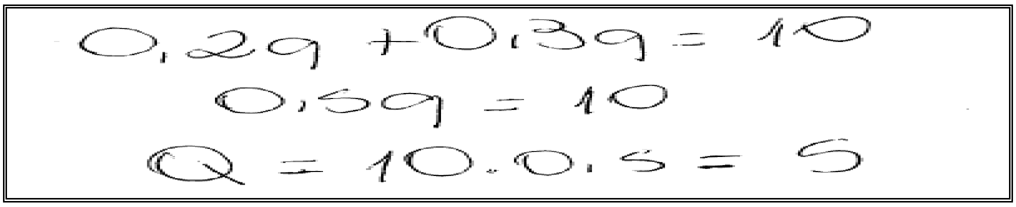
No que se refere à ***s i t u a - «*** a dupla ***ñ f*** 1 ***ò***, empregou os significados esperado, quer seja dedutivo-geométrico e o estrutural-conjuntista e desenvolveu a resolução corretamente, chegando à solução, como podemos verificar no protocolo.

Dupla 1



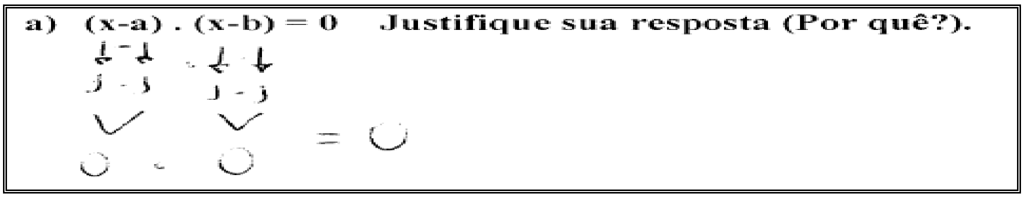
A **dupla 5** desenvolveu a ***s i t u a - «*** ***ñ f ò***, contemplando os significados, porém não conseguiu chegar à solução correta, que era q=100. A **dupla 2**, por sua vez, não conseguiu desenvolver corretamente a ***s i t u a - «*** ***ñ f ò***, nem utilizou os significados esperado. O protocolo seguinte revela isso:

Dupla 2



Observamos agora os resultados apresentados para a ***s i t u a - «*** ***ñ c ò***, que contemplava o significado estrutural-generalista em nossas análises preliminares. As duplas não desenvolveram suas estratégias corretamente, nem utilizaram o significado proposto para essa situação matemática. Podemos verificar isso nos protocolos que seguem:

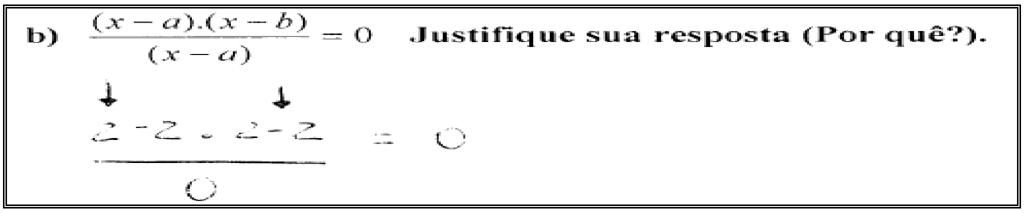
Dupla 5



a) (x-a) . (x-b) = 0 Justifique sua resposta (Por quê?).

$j - j \cdot j - j$

$0 \cdot 0 = 0$

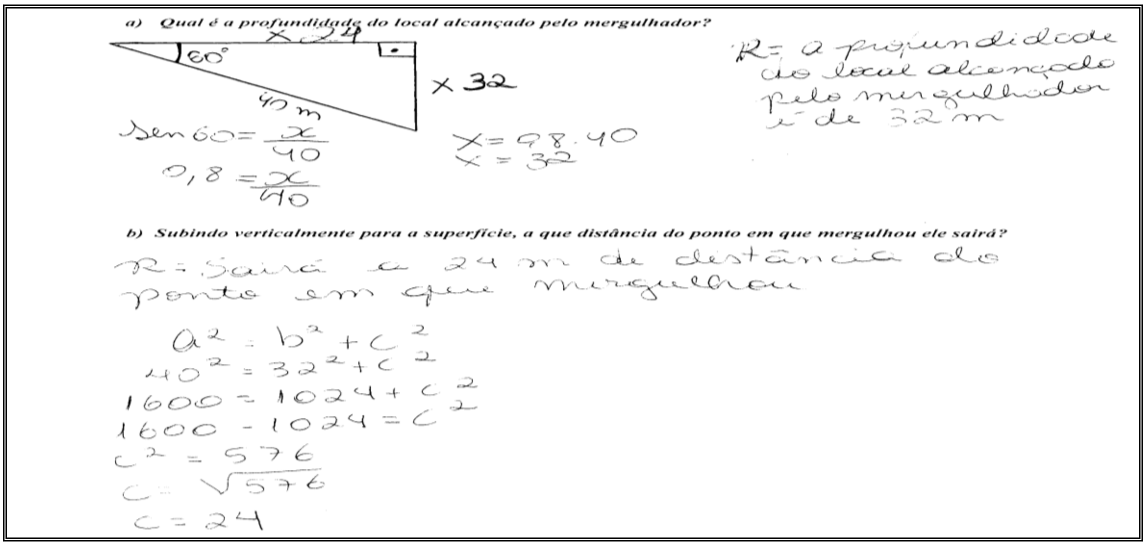


b) $\frac{(x-a).(x-b)}{(x-a)} = 0$ Justifique sua resposta (Por quê?).

$\frac{2-2 \cdot 2-2}{0} = 0$

Por fim analisando as ***situações*** que segundo nossa analise preliminar contemplaram o significado intuitivo-pragmático, podemos verificar que as duplas 1, 2 e 5 ao resolver a ***situação*** desenvolveram utilizando-se do significado proposto e ainda utilizaram-se em suas resoluções de conhecimentos de geometria, como podemos observar nos protocolos abaixo:

Dupla 1



a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

x 24

60°

40 m

x 32

sen 60 = $\frac{x}{40}$

0,8 = $\frac{x}{40}$

x = 0,8 . 40

x = 32

R = a profundidade do local alcançado pelo mergulhador é de 32 m

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

R = Sairá a 24 m de distância do ponto em que mergulhou

$a^2 = b^2 + c^2$

$40^2 = 32^2 + c^2$

$1600 = 1024 + c^2$

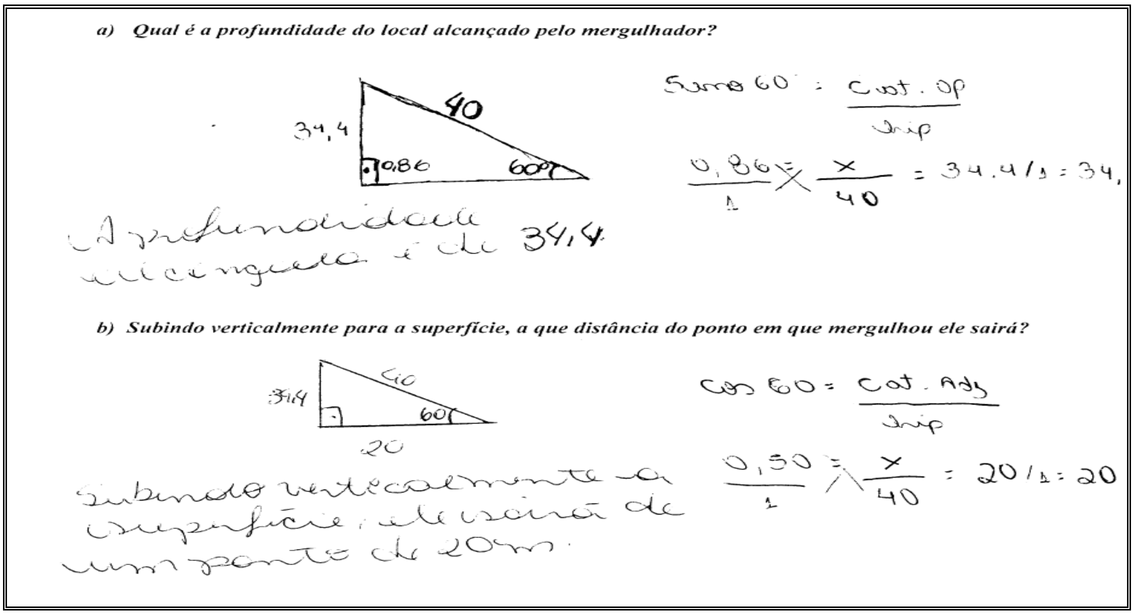
$1600 - 1024 = c^2$

$c^2 = 576$

$c = \sqrt{576}$

$c = 24$

Dupla 2


a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

34,4 — 40 — 0,86 — 60°

Seno 60 = Cat. op / hip

0,86/1 × x/40 = 34,4/1 = 34,

A profundidade alcançada é de 34,4

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

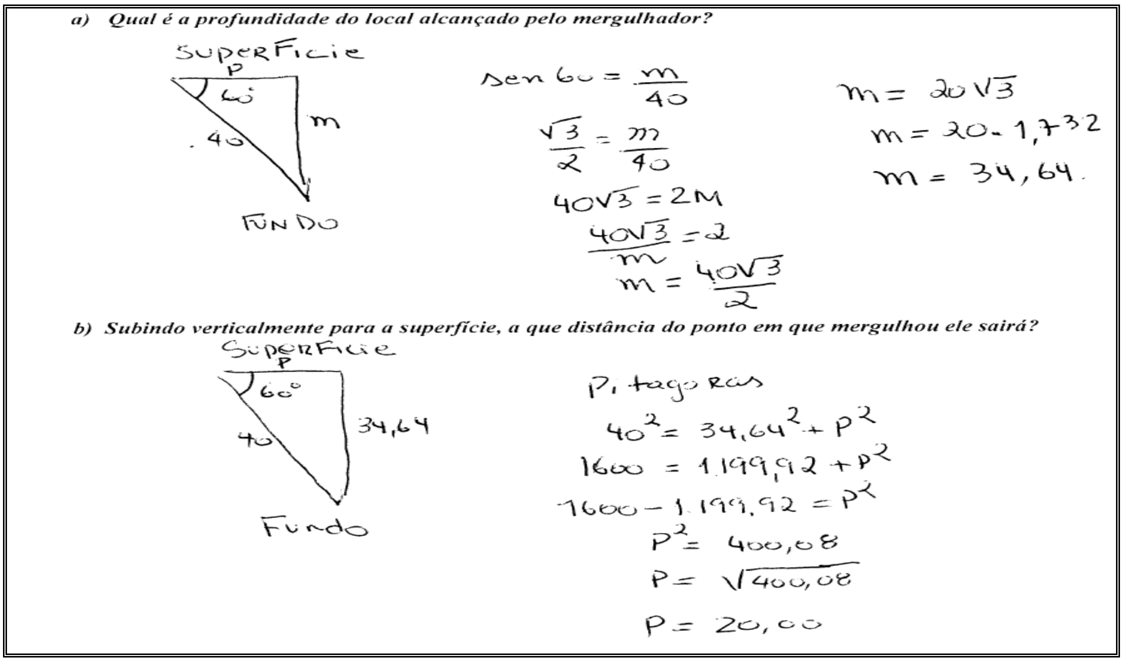
34,4 — 40 — 60° — 20

Cos 60 = Cat. Adj / hip

0,50/1 × x/40 = 20/1 = 20

Subindo verticalmente a superfície, ele sairá de um ponto de 20m.

Dupla 5


a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

SUPERFICIE — P — 60° — 40 — m — FUNDO

sen 60 = m/40

√3/2 = m/40

40√3 = 2M

40√3/m = 2

m = 40√3/2

m = 20√3

m = 20 . 1,732

m = 34,64.

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

SUPERFICIE — P — 60° — 40 — 34,64 — Fundo

Pitagoras

40² = 34,64² + P²

1600 = 1.199,92 + P²

1600 − 1.199,92 = P²

P² = 400,08

P = √400,08

P = 20,00

Em relação a ***s i t u a -*** «verificamos que as duplas 1, 2 e 5 tratam a situação de foram intuitiva, porém não conseguem encontrar a equação (12cd + 16 dvd = 70), que permeia a situação. Todavia as duplas não encontram um valor inteiro que possa satisfazer a situação, o que foi previsto em nossa analise preliminar também.

Passamos então para nossas conclusões analisando as reflexões aqui observadas e desenvolvidas pelas duplas nas situações da atividade 1.

4.3 Conclusões Sobre as Análises Comparativas

Retomando nosso objetivo de pesquisa — **Investigar as Concepções de Equações dos Alunos do Ensino Médio, verificando quais são os significados de equações que estão presentes em suas concepções —,** apresentamos a seguir algumas respostas e reflexões por nós encontradas, assim como questionamentos que gostaríamos de deixar como sugestões para pesquisas futuras.

Na busca de respostas aos nossos questionamentos iniciais, desenvolvemos uma pesquisa de caráter qualitativo, composta por duas atividades: a primeira buscou verificar o significado que os alunos poderiam atribuir/utilizar para cada uma das oito situações matemáticas apresentadas, e a segunda atividade buscou observar se o aluno reconheceria a equação presente em cada uma das oito situações da primeira atividade.

Os dados por nós coletados, bem como as análises aqui desenvolvidas, tornaram-se duplamente relevantes para nós, uma vez que nossa pesquisa está inserida no projeto mais amplo. Assim, nossos resultados poderão possibilitar e/ou fundamentar a continuidade do projeto, bem como ser utilizados em futuras pesquisas a respeito dos significados de equação.

Por fim, gostaríamos de retomar, neste momento, o pressuposto por nós assumido quando da concepção desta pesquisa: conhecendo quais significados estão presentes nos "conhecimentos" dos alunos do Ensino Médio, podemos ***discutir os Multisignificados de Equação no ensino e na aprendizagem de Matemática nesse nível de ensino, possibilitando e contribuindo, assim, para a ampliação das concepções de equação entre esses alunos***.

Com isso, ratificamos que, em nossas análises, foi observada uma forte tendência dos alunos para utilizar métodos de tentativas. Tais procedimentos já haviam sido previstos por nós nas análises preliminares. Exemplificamos a persistência de tal uso nas situações "a", "b", "c", "e", "g" e "h" da atividade 1.

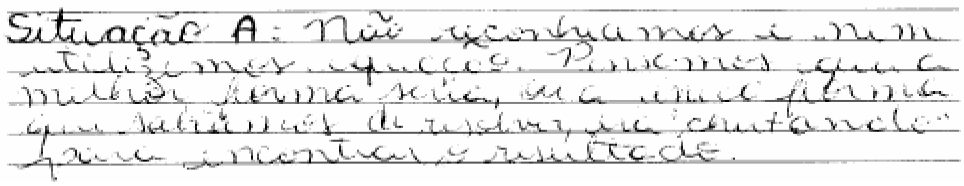
Nas situações "d" e "f", as duplas não utilizaram o método de tentativas. Em nossa opinião, na situação "d", isso poderia ser explicado, por exemplo, pelo fato de tratar-se de uma situação que envolvia relações trigonométricas, o que não dava margem para que eles tentassem a substituição de valores que satisfizessem a solução. Já na situação "f", percebemos que os alunos sentiram a necessidade de escrever uma igualdade entre as expressões, assumindo, assim, um tipo de equação que se assemelha àquelas trabalhadas por eles em suas aulas de matemática.

Arriscamo-nos a afirmar que o significado mais utilizado por eles é o intuitivo-pragmático. Contudo, em algumas das situações propostas, em que a resolução parece conduzir ao desenvolvimento com o uso de métodos e técnicas, acabou aparecendo com frequência o significado processual-tecnicista.

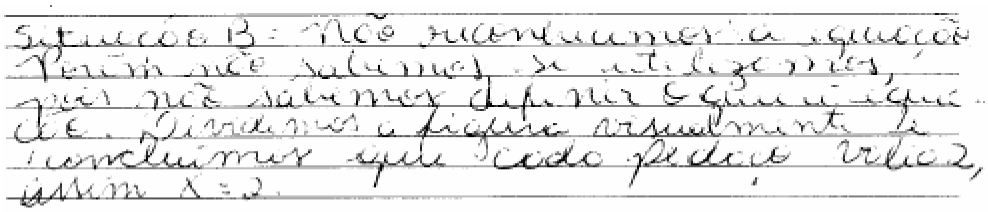
Uma importante observação apontada no exame de qualificação foi o fato de que, “quando a resolução era desenvolvida pelo método de tentativas, o primeiro número que os alunos utilizavam para testar era o coeficiente das incógnitas”. Infelizmente, não foi possível aprofundar tal observação em nossa pesquisa, mas fica aqui uma sugestão de investigação nessa direção.

Em relação ao reconhecimento das equações nas situações propostas na atividade 1, o que nos chamou a atenção foi o fato de, diversas vezes, os alunos vincularem a ideia de equação a letras e sinal de igualdade. Outro fator interessante foi o que, mesmo resolvendo a equação, a dupla declarou não saber se utilizou equação, pois os alunos não conhecem a “definição” de equação. Podemos observar isso em alguns protocolos abaixo:

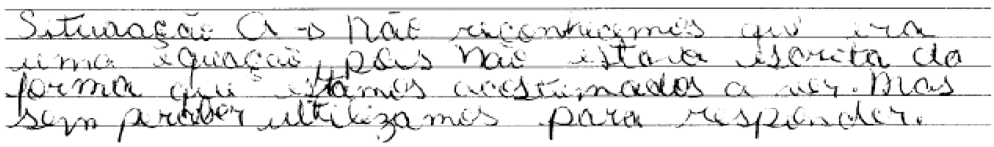
Dupla 1


Situação A: Não reconhecemos e nem utilizamos equação. Pensamos que a melhor forma seria, ou a única forma que sabíamos de resolver, ia contando para encontrar o resultado.

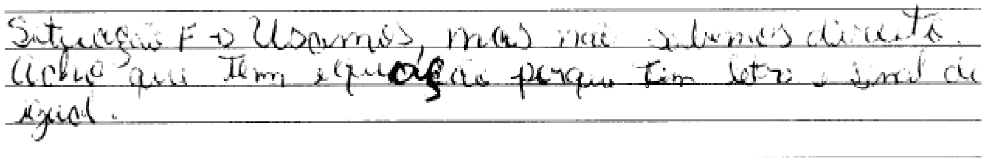
Dupla 1


Situação B: Não reconhecemos a equação. Porém não sabemos se utilizamos, pois não sabemos definir o que é equação. Dividimos a figura visualmente e concluímos que cada pedaço vale 2, assim x = 2.

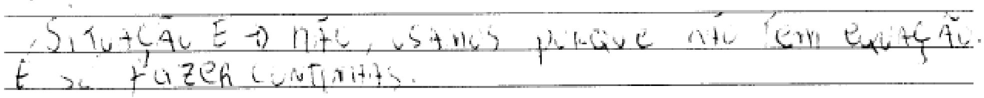
Dupla 2


Situação A -> Não reconhecemos que era uma equação, pois não estava escrita da forma que estamos acostumados a ver. Mas sem saber utilizamos para responder.

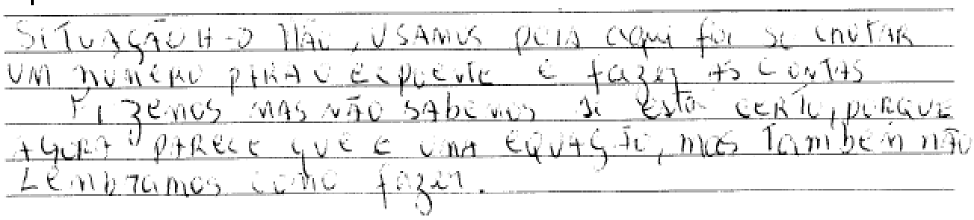
Dupla 2


Situação F → Usamos, mas não sabemos direito. Acho que tem equação porque tem letra e sinal de igual.

Dupla 5


Situação E → Não, usamos porque não tem equação. É só fazer continhas.

Dupla 5


Situação H → Não, usamos pela aqui foi só chutar um número para o expoente e fazer as contas. Fizemos mas não sabemos se está certo, porque agora parece que é uma equação, mas também não lembramos como fazer.

Com base no discurso desses alunos e em seus protocolos, concluímos, em nossa pesquisa, que os alunos envolvidos não possuem uma concepção clara do que seja equação. Entendemos que eles utilizam a ideia de equação para resolver algumas das situações matemáticas apresentadas, porém, a própria definição de equação que eles possuem parece ser um tanto quanto confusa, quando falam sobre a noção de equação.

Antes de apresentar nossas reflexões finais, gostaríamos de retomar nossa questão de pesquisa: ***Quais significados de equações podem ser encontrados nas concepções construídas pelos alunos do Ensino Médio, ao ver e tratar situações que remetem aos significados de equação concebidos por Ribeiro? Quais as concepções de equação que estão presentes nos conhecimentos dos alunos do Ensino Médio?***

Finalmente, concluímos, em nossa pesquisa, que o significado intuitivo-pragmático e o significado processual-tecnicista foram os encontrados em algumas das situações desenvolvidas por esse grupo de alunos; e que o reconhecimento de uma equação não está claro para eles.

Dessa forma, gostaríamos de deixar como sugestão, para professores de Matemática, que trabalhem outros significados com seus alunos, o que pode possibilitar um repertório e um instrumental mais amplo para estes, principalmente quando estiverem envolvidos com a resolução de problemas que contemplem tal ideia matemática.

Destacamos aqui a pertinência e a relevância da discussão de diferentes significados de ideias matemáticas com os alunos, em especial aquelas relacionadas com a Álgebra. Tal afirmação baseia-se em parte nas pesquisas de Nagamachi (2009) e de Martins (2008), que apontam, em seus resultados, a grande preocupação que trabalhos de outros pesquisadores brasileiros demonstram, no que se refere à busca de significados para o ensino de equações.

Enfim, devido às diferentes limitações que qualquer pesquisa sempre apresenta, encerramos nossas discussões, deixando aqui alguns questionamentos para pesquisas futuras:

- Como se dá a construção de concepções de equação em alunos do Ensino Médio e/ou Ensino Fundamental?

- Quais situações matemáticas são trabalhadas e como são trabalhadas nas aulas de matemática, no sentido de propiciar a construção de (diferentes) significados para a noção de equação?

- Quais situações matemáticas são trabalhadas e como são trabalhadas nas aulas de matemática, no sentido de propiciar a discussão sobre o que é e quando é utilizada a noção de equação?

BIBLIOGRAFIA

ATTORPS, I. Teachers' images of the 'equation' concept. **European Research in Mathematics Education**. Bellaria, Itália, n. 3, 2003. Disponível em: <http://ermeweb.free.fr/cerme3/groups/tg1/tg1_list_html>. Acesso em: 15 dez. 2006, às 19h53.

______. **Concept definition and concept image**. Disponível em: <http://www.distans.hkr.se/rikskonf/Grupp%202/Attorps.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2007, às 11h05.

BOOTH, W. C.; COLOMB, G, G.; WILLIAMS, J. M. **A arte da pesquisa**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, SEMTEC, 2000.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Análise de resoluções de questões em matemática: as etapas do processo. **Educação Matemática em Revista,** RS, v. 7, n. 7, p. 33-41, 2006.

DORIGO, M. **Função quadrática:** um estudo sobre as representações gráficas. 2006. 53 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) — Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DREYFUS, T.; HOCH. M. Equations: a structural approach. CONFERENCE OF INTERNATIONAL GROUP FOR THE PME, 28th., Bergen, Noruega, 2004. **Proceedings...** p. 1-152 – 1-155.

FIGUEIREDO, A. C. **Saberes e concepções de Educação Algébrica em um curso de Licenciatura em Matemática.** 2007. 288 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A., Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições** — Faculdade de Educação da Unicamp, v. 3, n. 1[7], p. 39-54, mar. 1992.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar ... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições** — Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1[10], p. 79-91, mar. 1993.

GIL, K. H.; PORTANOVA, R. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA — ENEM **—**, 9., 18 a 21 julho de 2007, Belo Horizonte – MG. Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/posteres.html>. Acesso em: 12 jul. 2009, às 11h00.

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais o caso da derivada**. 2004. 229 p. Tese (Doutorado em Ciências) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

LIMA, R. N. **Equações algébricas no Ensino Médio:** uma jornada por diferentes mundos da Matemática. 2007. 358 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MARTINS, A. M. **Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental.** 2008. 121 p. Dissertação

(Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

NAGAMACHI, M. T. **Equações no Ensino Médio:** uma metanálise qualitativa das dissertações e teses produzidas no Brasil de 1998 a 2006. 2009. 73 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RIBEIRO, A. J. **Analisando o desempenho de alunos de Ensino Fundamental em Álgebra, com base nos dados do SARESP**. 2001. 116 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

______. **Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. 2007. 141 p. (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SACRISTÁM, J. G. Currículo e diversidade cultural. In: SILVA, Tomaz Tadeu da; MOREIRA, Antonio Flavio (Org.). **Territórios contestados.** 2. ed. Petrópolis: Vozes, 1998.

SCHOEN, H. L. A resolução de problemas em Álgebra**.** In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

SEFFRIN, H. M. et al. **Um resolvedor de equações algébricas como ferramenta de apoio à sala de aula no ensino de equações algébricas**. Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS-RS). Disponível em: <www.sbc.org.br/bibliotecadigital/download.php?paper=1280>. Acesso em: 12 jul. 2009, às 13h30.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, n. 22, p. 1-36, 1991.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. In D.O. Tall (ad.), **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

USISKIN, Z. Concepções sobre Álgebra da escola média e utilizações de variáveis. In: SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

ZENERE, L. C. S. Álgebra: como encontrar o “x” da questão? Lajeado/RS: UNIVATES, 2005. 8 p. Artigo.

ANEXOS

Instrumentos de Coleta de Dados

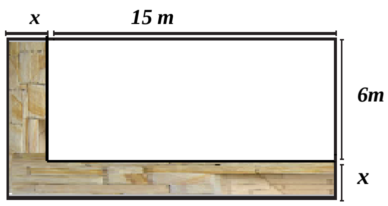
Atividade 1

Situação- a

Determine os valores de y para os quais a expressão (y ï 1)^2 é igual a -4y.

Situação- b

O projeto de um jardim retangular prevê que se coloquem, no seu contorno (formando retângulos), pedras ornamentais, que estão indicadas na figura:



Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de 46 m^2, calcule a medida x, em metros.

Situação- c

Observe as seguintes situações e encontre, se possível, valor (es) para x:

a) $(x - a).(x - b) = 0$ ***Justifique sua resposta (Por quê?).***

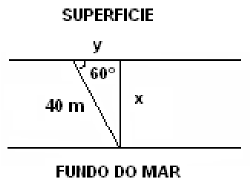
Por que você resolveu desta forma a questão?

b) $\frac{(x - a).(x - b)}{(x - a)} = 0$ ***Justifique sua resposta (Por quê?).***

Por que você resolveu desta forma a questão?

Situação- d

Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60° com a superfície, conforme mostra o desenho.



a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

Situação- e

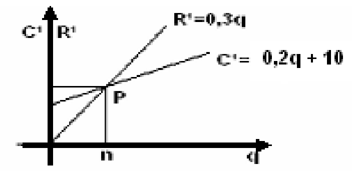
Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?

Situação- f

Um empres§rio prev° qòu ep aor ac uas t por ot dbut -a«l o ñdC

certa quantidade ñqò de geļòa, d eoi brt ai sd ae cao m

a venda de todas as geladeiras produzidas, variam como mostra o gráfico abaixo.



O ponto ñPò indica que o empres§rio n«

com a produção e venda de um certo número de geladeiras. Com qual quantidade de geladeiras esse empresário não terá lucro nem prejuízo?

Situação- g

Resolva, em R, determinando o conjunto solução:

$\log_2(2x-5)=2$

Situação- h

Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, em função do tempo t, em horas, de acordo com a fórmula $m=3^{2t}+3^{t+1}-108$***. Assim sendo, calcule o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar esse material antes que ele se volatilize totalmente.***

Atividade 2

Na atividade 1, existe um objeto matemático que chamamos de equação e que está presente em cada uma das situações apresentadas. Você reconheceu e/ou utilizou este objeto matemático? Se sim, em quais das situações e como você utilizou? Se não, justifique o porquê não utilizou.

TERMOS DE CONSENTIMENTO

UNIVERSIDADE BANDEIRANTES DE SÃO PAULO
CONSELHO DA PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
Programa de Pós-Graduação *stricto sensu* em Educação Matemática

Pesquisa: Investigando as Concepções de Equação de um Grupo de Alunos do Ensino Médio

Prezado(a) ____Diretor(a) da Escola ____Vimos por meio desta solicitar vossa autorização para o desenvolvimento e a participação de alunos desta escola na pesquisa de mestrado desenvolvida pelo aluno Marcio Dorigo, sob a responsabilidade e orientação do Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, no curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo.

Gostaríamos de esclarecer que:

1) Estaremos solicitando autorização de participação aos pais e/ou responsáveis dos alunos menores de idade;
2) O aluno irá participar somente respondendo a dois questionários com situações envolvendo “Conhecimentos Matemáticos”;
3) A identidade dos alunos assim como da escola serão mantidas em absoluto sigilo;
4) Tanto o aluno, os pais e/ou responsáveis e a escola podem solicitar informações adicionais, bem como tomar ciência do andamento e dos resultados (parciais e finais) da pesquisa a qualquer momento;
5) É facultado ao aluno (ou por iniciativa dos pais e/ou responsáveis) deixar de participar da pesquisa a qualquer momento;
6) Não há qualquer vinculo financeiro entre o pesquisador, instituições de ensino, alunos e pais e/ou responsáveis.

Esclarecemos ainda que os resultados desta pesquisa deverão ser publicados em revistas cientificas e/ou congressos na área da educação, sempre mantendo o anonimato dos alunos. Colocamos a disposição para quaisquer esclarecimentos e necessidades, pelo telefone (11) 2972-9045, com Prof. Alessandro Jacques Ribeiro ou com mestrando Marcio dorigo pelo telefone (11) 9198-2811.

São Paulo, _____de________________de 2009.

____

Diretor(a) de Escola

____

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro

RG. 19.801.977

____

Mestrando Marcio Dorigo

RG. 20.669.872-0

UNIVERSIDADE BANDEIRANTES DE SÃO PAULO
CONSELHO DA PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
Programa de Pós-Graduação *stricto sensu* em Educação Matemática

Pesquisa: Investigando as Concepções de Equação de um Grupo de Alunos do Ensino Médio

Prezados Pais e/ou Responsáveis,

Vimos por meio desta solicitar vossa autorização para a participação do menor ____, na pesquisa de mestrado desenvolvida pelo aluno Marcio Dorigo, sob a responsabilidade e orientação do Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, no curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, a ser desenvolvida na Escola ____

Gostaríamos de esclarecer que:

1) O aluno irá participar somente respondendo a dois questionários com situações envolvendo "Conhecimentos Matemáticos";
2) Sua identidade será mantida em absoluto sigilo;
3) Tanto o aluno como os pais e/ou responsáveis podem solicitar informações adicionais, bem como tomar ciência do andamento e dos resultados (parciais e finais) da pesquisa a qualquer momento;
4) É facultado ao aluno (ou por iniciativa dos pais e/ou responsáveis) deixar de participar da pesquisa a qualquer momento;
5) Não há qualquer vinculo financeiro entre o pesquisador, instituições de ensino, alunos e pais e/ou responsáveis.

Esclarecemos ainda que os resultados desta pesquisa deverão ser publicados em revistas cientificas e/ou congressos na área da educação, sempre mantendo o anonimato dos alunos. Colocamos a disposição para quaisquer esclarecimentos e necessidades, pelo telefone (11) 2972-9045, com Prof. Alessandro Jacques Ribeiro ou Mestrando Marcio dorigo pelo telefone (11) 9198-2811.

São Paulo, _____de________________de 2009.

____

Pai ou Responsável

____

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro

RG. 19.801.977

____

Mestrando Marcio Dorigo

RG. 20.669.872-0